12 1次関数の利用

学習1 1次関数とみなすこと

例題1 容器に入れた水を加熱する実験をした。加熱を始めてから x 分後の水温を y℃として、10分後まで調べたら、右の表のようになった。このとき、次の問いに答えなさい。

x	0	2	4	6	8	10
y	12.0	19.8	28.0	36.2	43.7	51.8

(1) 表の x と y の値が表す点を、下の図にかき入れ、かき入れた6つの点のできるだけ近くを通るように直線をかきなさい。

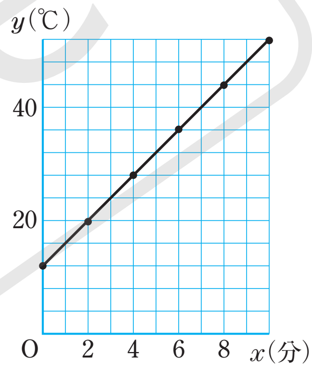
(2) (1)でかいた直線を1次関数のグラフとみて、次の問いに答えなさい。

① y を x の式で表しなさい。

② 加熱を続けたとき、水温が60℃となるのは、加熱し始めてから何分後と考えられますか。

解き方 (1) 2点(0, 12)、(4, 28)を通る直線をひく。

答 右の図



(2) ① 変化の割合は、$\frac{28-12}{4-0}=4$ だから、$y=4x+b$ とおける。

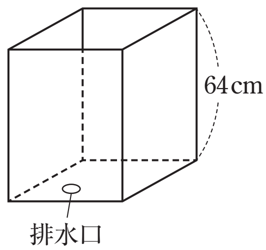
また、$x=0$ のとき、$y=12$ だから、$b=12$ である。

よって、求める式は、$y=4x+12$ **答** $y=4x+12$

② $y=4x+12$ に $y=60$ を代入すると、

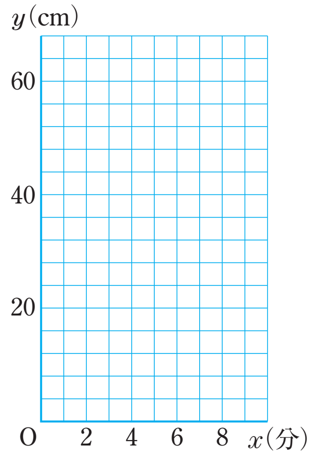
$60=4x+12$、$4x=48$、$x=12$ **答** 12分後

確認問題1 右の図のような、深さが64cmで、底に排水口がついた直方体の形の容器がある。この容器を満水にしたあと、排水口を開いて排水する実験をした。排水を始めてから x 分後の水の深さを y cmとして、10分後まで調べたら、次の表のようになった。このとき、次の問いに答えなさい。



x	0	2	4	6	8	10
y	64.0	55.8	48.0	40.2	32.3	24.0

□(1) 表の x と y が表す点を、右の図にかき入れ、かき入れた6つの点のできるだけ近くを通るように直線をかきなさい。



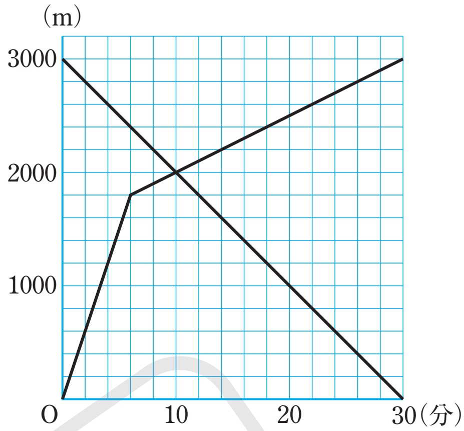
(2) (1)でかいた直線を1次関数のグラフとみて、次の問いに答えなさい。

□① y を x の式で表しなさい。

□② 容器が空になるのは、排水を始めてから何分後と考えられますか。

学習2　1次関数のグラフの利用

例題 2　太郎さんは、家から3000m はなれた駅まで行くのに、家を出発してから途中の公園までは自転車で走り、公園から駅までは歩いた。弟の次郎さんは、太郎さんが家を出発するのと同時に駅を出発し、分速100m で歩いて家に向かった。右の図は、2人が同時に出発してからの時間と家からの道のりの関係をグラフに表したものである。このとき、次の問いに答えなさい。



(1)　太郎さんが自転車で走った速さは分速何m ですか。

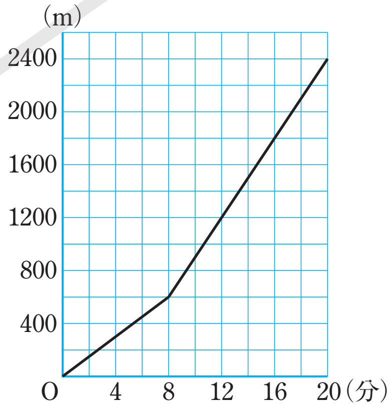
(2)　太郎さんと次郎さんが出会ったのは、2人が同時に出発してから何分後ですか。

解き方　(1)　グラフより、6分間で1800m 進んでいるから、分速$1800\div6=300$(m)　　答 **分速300m**

(2)　2人のグラフの交点のx座標の値を読みとればよい。2人のグラフは、点(10, 2000)で交わっている。よって、2人は、同時に出発してから10分後に家から2000m の地点で出会っている。　　答 **10分後**

参考　2人が同時に出発してからx分後の家からの道のりをym とすると、太郎さんが歩いているようすを表すグラフは、2点(6, 1800)、(30, 3000)を通る直線になるから、式は$y=50x+1500$…①
次郎さんが進むようすを表すグラフは、2点(0, 3000)、(30, 0)を通る直線になるから、式は、$y=-70x+3000$…②　①、②を連立方程式として解くと、$x=10$、$y=2000$　これより、2人が出会ったのは、同時に出発してから10分後と、計算で求めることもできる。

確認問題 2　ゆみさんは、家から2400m はなれた学校まで行くのに、家を出発してから途中の郵便局までは歩き、郵便局から学校までは走った。姉のまみさんは、ゆみさんが家を出発してから8分後に自転車で家を出発し、一定の速さで学校に向かったところ、ゆみさんより2分早く学校に着いた。右の図は、ゆみさんが家を出発してからの時間と家からの道のりの関係をグラフに表したものである。このとき、次の問いに答えなさい。



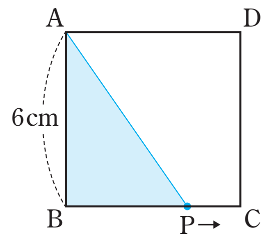
□(1)　ゆみさんが走った速さは分速何m ですか。

□(2)　まみさんが家を出発してから学校に着くまでのようすを表すグラフをかきなさい。

□(3)　まみさんがゆみさんを追いこしたのは、ゆみさんが家を出発してから何分後ですか。

学習3　1次関数と図形

例題3　右の図は1辺が6 cmの正方形ABCDである。点PはBを出発して、毎秒1 cmの速さで、正方形の辺上をC、Dを通ってAまで動く。点PがBを出発してからx秒後の△ABPの面積をy cm^{2}として、次の問いに答えなさい。



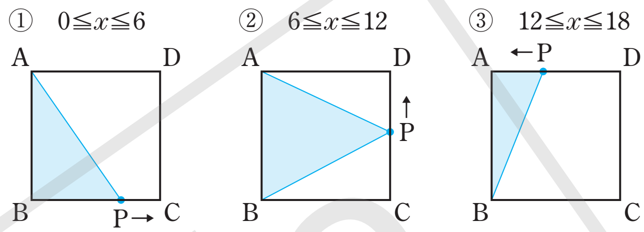
(1)　次の各場合について、yをxの式で表しなさい。

①　$0 \leqq x \leqq 6$　　②　$6 \leqq x \leqq 12$　　③　$12 \leqq x \leqq 18$

(2)　xとyの関係を表すグラフをかきなさい。

(3)　$y=12$ となるときのxの値をすべて求めなさい。

解き方　(1)　①、②、③は、点Pがそれぞれ辺BC上、CD上、DA上にある場合を表し、それぞれ右の図のような状態になる。



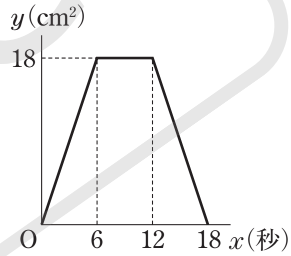
①　BP$=x$cm だから、$\triangle ABP=\dfrac{1}{2}\times AB\times BP$ より、$y=\dfrac{1}{2}\times 6\times x=3x$　　答　$\boldsymbol{y=3x}$

②　$\triangle ABP=\dfrac{1}{2}\times AB\times BC$ より、$y=\dfrac{1}{2}\times 6\times 6=18$　　答　$\boldsymbol{y=18}$

③　AP$=$BC$+$CD$+$DA$-x=6\times 3-x=18-x$(cm) だから、
$\triangle ABP=\dfrac{1}{2}\times AB\times AP$ より、$y=\dfrac{1}{2}\times 6\times (18-x)=-3x+54$

答　$\boldsymbol{y=-3x+54}$

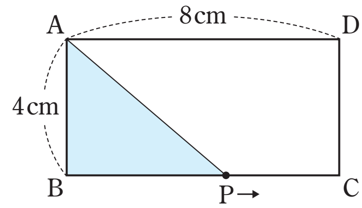
(2)　答



(3)　グラフより、$y=12$ となるのは、$0 \leqq x \leqq 6$ または $12 \leqq x \leqq 18$ のときである。よって、$y=3x$ に $y=12$ を代入すると、$12=3x$、$x=4$
$y=-3x+54$ に $y=12$ を代入すると、$12=-3x+54$、$x=14$

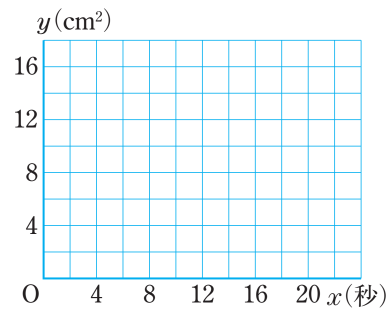
答　$\boldsymbol{x=4}$、**14**

確認問題3　右の図の長方形ABCDで、点PはBを出発して、毎秒1 cmの速さで、長方形の辺上をC、Dを通ってAまで動く。点PがBを出発してからx秒後の△ABPの面積を$y$cm^{2}として、次の問いに答えなさい。



(1)　次の各場合について、yをxの式で表しなさい。

□①　$0 \leqq x \leqq 8$　　□②　$8 \leqq x \leqq 12$　　□③　$12 \leqq x \leqq 20$



□(2)　xとyの関係を表すグラフをかきなさい。

□(3)　$y=11$ となるときのxの値をすべて求めなさい。

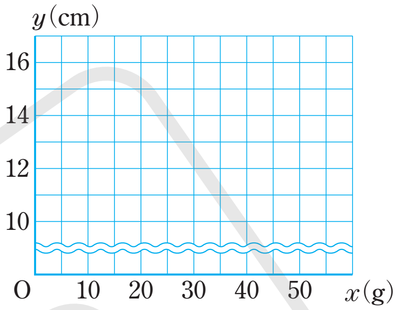
練習問題

1 **［1次関数とみなすこと①］**　長さ10 cmのばねにおもりをつるして、ばね全体の長さを調べる。xgのおもりを下げたときのばね全体の長さを$y$cmとして、50 gまで調べたら、下の表のようになった。このとき、次の問いに答えなさい。

例題1

□(1)　表のxとyの値が表す点を、右下の図にかき入れ、かき入れた6つの点のできるだけ近くを通るように直線をかきなさい。

x	0	10	20	30	40	50
y	10.0	11.1	11.9	13.1	14.1	15.0



(2)　(1)でかいた直線を1次関数のグラフとみる。おもりの重さが100 gまでは同じ直線のグラフになるとして、次の問いに答えなさい。

□①　直線の式を求めなさい。xの変域は書かなくてよい。

□②　このばねに60 gのおもりを下げたときのばね全体の長さは何cmになると予想できますか。

□③　ばね全体の長さが18 cmになるのは、何gのおもりを下げたときと予想できますか。

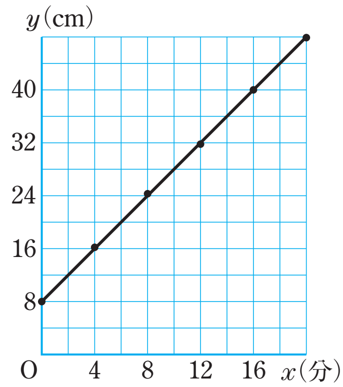
2 **［1次関数とみなすこと②］**　深さが80cmの直方体の水そうがあり、8 cmの深さまで水が入っている。この水そうに一定の割合で水を入れていく。水を入れ始めてからx分後の水の深さを$y$cmとして、xとyの関係を調べたら、右の表のようになった。また、その表をもとに、xとyの関係をグラフに表したものが下の図の直線である。水の深さは時間の1次関数とみなして考えて、次の問いに答えなさい。

例題1

□(1)　直線の式を求めなさい。

x	0	4	8	12	16	20
y	8.0	16.2	24.3	31.8	39.9	48.0

□(2)　(1)で求めた直線の式の傾きは、何を表していますか。



(3)　水を入れ始めてから次の時間が経過したときの水の深さは、それぞれ何cmになると予想できますか。

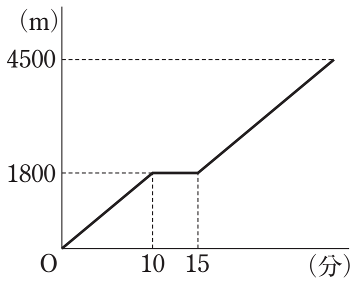
□①　23分後　　　□②　31分後

(4)　水そうの水の深さが次のようになるのは、それぞれ水を入れ始めてから何分後と予想できますか。

□①　60 cm　　　□②　80 cm

3 **［1 次関数のグラフの利用］** 健太さんは、家から4500 m はなれた神社まで行くのに、走って家を出発し、途中、役場の前で 5 分間休けいしてから、再び同じ速さで走った。右の図は、家を出発してからの時間と道のりの関係を表したグラフである。このとき、次の問いに答えなさい。

例題 2



□(1) 健太さんが走った速さは分速何m ですか。

□(2) 健太さんが神社に着いたのは、家を出発してから何分後ですか。

□(3) 健太さんが家を出発してから x 分後の家からの道のりを y m とする。健太さんが役場から神社まで走ったとき、y を x の式で表しなさい。ただし、変域は書かなくてよい。

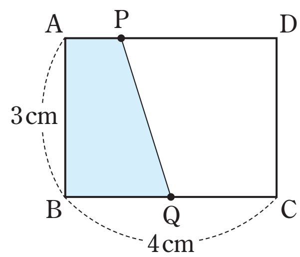
(4) 健太さんの弟は、健太さんが家を出発するのと同時に神社を出発し、一定の速さで家に向かった。健太さんが神社に着いたとき、弟はちょうど役場の前にいたという。このとき、次の問いに答えなさい。

□① 弟が家に着いたのは、2 人が同時に出発してから何分後ですか。

□② 健太さんと弟が出会ったのは、家から何m の地点ですか。

4 **［1 次関数と図形］** 右の図の長方形 ABCD で、点 P、Q はそれぞれ A、B を同時に出発して、点 P は毎秒 1 cm の速さで、辺 AD 上を D まで進み、点 Q は毎秒 2 cm の速さで辺 BC 上を、B → C → B の順に往復する。点 P、Q が同時に出発してから x 秒後の四角形 ABQP の面積を y cm^2 として、次の問いに答えなさい。

例題 3

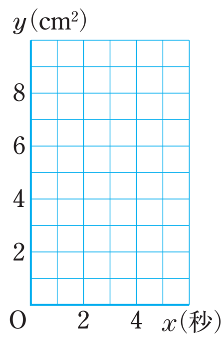


(1) 次の各場合について、y を x の式で表しなさい。

□① $0 \leqq x \leqq 2$

□② $2 \leqq x \leqq 4$

□(2) x と y の関係を表すグラフをかきなさい。



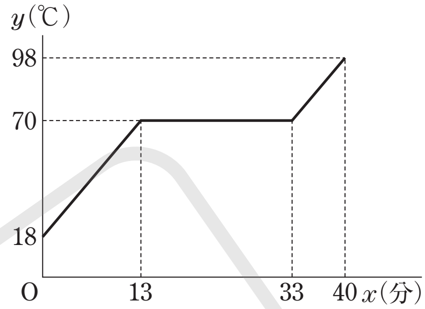
□(3) $x=3$ のときの y の値を求めなさい。

□(4) $y=7$ となるときの x の値をすべて求めなさい。

応用問題

1 98℃と70℃の２つの温度に設定できる電気ポットがある。この電気ポットには、電源を入れると時間に対して一定の割合で水温を上昇させ、設定温度になると水温を保つ機能がある。Ａさんは18℃の水が入った電気ポットの電源を入れた。このときの設定温度は70℃になっていた。電気ポットの水温が70℃になってから20分後に設定温度を98℃にしたところ、電源を入れてから40分後に水温が98℃になった。

右の図は、Ａさんが電源を入れてから x 分後の電気ポットの中の水温を y℃とするとき、水温が98℃になるまでの x と y の関係をグラフに表したものである。このとき、次の問いに答えなさい。



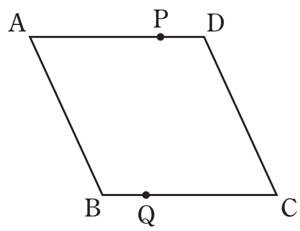
□(1) Ａさんが電源を入れてから５分後の水温を求めなさい。

(2) x の変域が次のとき、それぞれ y を x の式で表しなさい。

□① $0 \leqq x \leqq 13$　　□② $33 \leqq x \leqq 40$

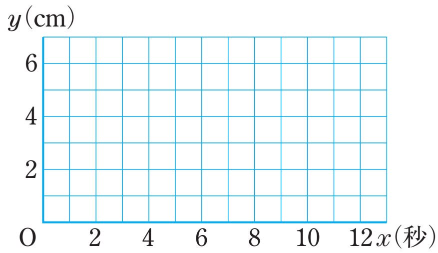
□(3) Ａさんが電気ポットの電源を入れたあとに、Ｂさんはやかんに水を入れてガスコンロで沸かし始めた。やかんの中の水温は最初は18℃であり、１分ごとに８℃ずつ一定の割合で上昇した。Ａさんが電源を入れてから30分後に、やかんの中の水温が電気ポットの中の水温と等しくなった。Ｂさんが沸かし始めたのは、Ａさんが電源を入れてから何分何秒後ですか。

2 右の図で、四角形ABCDは１辺の長さが４cmのひし形である。点Ｐ、Ｑは、それぞれ頂点Ｄ、Ｂを同時に出発して、点Ｐは毎秒１cmの速さで辺AD上を、点Ｑは毎秒３cmの速さで辺BC上をそれぞれくり返し往復する。点Ｐが頂点Ｄを出発してから x 秒後のAPの長さを $y$cmとして、次の問いに答えなさい。



□(1) 点Ｐ、Ｑがそれぞれ頂点Ｄ、Ｂを同時に出発してから最初に PD＝BQ となるのは何秒後ですか。

□(2) 点Ｐが頂点Ｄを出発してから12秒後までの x と y の関係を表すグラフをかきなさい。



難□(3) 点Ｐ、Ｑがそれぞれ頂点Ｄ、Ｂを同時に出発してから12秒後までに、AP＝BQ となるのは何回あるか求めなさい。