第2講　図形と方程式

入試標準演習

1　次の$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{ク}}$にあてはまる数を答えよ。
　座標平面上に２点A(1，3)，B(3，7)があり，直線$y=2x-4$をℓとする。
(1)　直線ℓに関して点Aと対称な点をCとする。このとき，点Cの座標は($\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$)である。
(2)　直線BCの方程式は$y=x+\boxed{\text{エ}}$である。
(3)　点Pが直線ℓ上を動くとき，AP＋PBの最小値は$\boxed{\text{オ}}$である。このとき，点Pの座標は($\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$)であり，△APBの面積Sは$S=\boxed{\text{ク}}$である。

2　次の$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$にあてはまる数を答えよ。
　座標平面上の３点A(−1，−2)，B(6，2)，C(2，5)を頂点とする△ABCがある。点Aから直線BCに垂線AHを引くと，AH＝$\boxed{\text{ア}}$であり，△ABCの面積は$\boxed{\text{イ}}$である。

3　次の$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$にあてはまる数を答えよ。
　aを実数とする。２つの円$x^2+y^2-4=0$と$x^2+y^2-2ax-8y+16=0$が異なる２点で交わっているとき，aのとり得る値の範囲は，$a<\boxed{\text{ア}}$または$a>\boxed{\text{イ}}$である。

4　次の$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{オ}}$にあてはまる数を答えよ。
　xy平面に円$C_1：x^2+y^2=1$と直線$L_1：y=-\dfrac{1}{2}x+a$がある。直線L_1が円C_1に接するとき，aの値は$a_1=\boxed{\text{ア}}$と$a_2=\boxed{\text{イ}}$である(ただし，$a_1<0$，$a_2>0$とする)。$a=a_2$のときの接点の座標は，($\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$)である。円C_1と直線L_1が２点で交わるとき，２交点間の距離が$\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$となる正のaの値は$\boxed{\text{オ}}$である。

5　次の$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{エ}}$にあてはまる数を答えよ。
　座標平面において，円Cは直線$\ell：y=2x$とx軸の両方に接し，Cの中心Pは第１象限にあり，直線$y=x-1$上にあるとする。このとき，Pの座標は$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$であり，ℓに関してPと対称な点の座標は$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$である。

6 次の $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{カ}}$ にあてはまる数を答えよ。

座標平面上の3点$(2,\ 3)$，$(-5,\ 10)$，$(-2,\ 1)$を通る円をC_1とする。このとき，
C_1の中心は$(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}})$，半径は$\boxed{\text{ウ}}$
である。C_1と点$(2,\ 3)$で外接し，x軸とも接している円をC_2とする。このとき，
C_2の中心は$(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}})$，半径は$\boxed{\text{カ}}$
である。

7 座標平面において，A$(0,\ 5)$とし，点$(0,\ 2)$を中心とし半径が2である円をCとする。点PがC上を動くとき，線分APを1：2に外分する点の軌跡を求めよ。

8 次の $\boxed{\text{ア}}$ 〜 $\boxed{\text{ウ}}$ にあてはまる数を答えよ。

点A$(4,\ 2)$，点B$(-2,\ 4)$と，円$x^2+y^2=4$上を動く点Cを頂点とする△ABCの重心の軌跡は，
中心$(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}})$，半径$\boxed{\text{ウ}}$の円である。

9 座標平面において，2つの不等式

$x^2+y^2\leqq 4$,

$y\leqq 2x+2$

を同時に満たす領域をAとする。次の問いに答えよ。

(1) 円$x^2+y^2=4$と直線$y=2x+2$の交点の座標を求めよ。

(2) 点$(x,\ y)$が領域Aを動くとき，$k=y-x$の最大値と最小値を求めよ。

10 aを実数とする。不等式$x^2-4x+y^2-6y+9<0$，$x^2-2ax+y^2-2ay+2a^2-1<0$が表す座標平面上の領域をそれぞれD_1，D_2とする。D_2がD_1に含まれるとき，aの取りうる値の範囲を求めよ。

入試例題 1　2円の交点を通る直線・円の方程式

2つの円 $C_1：x^2+y^2-3=0$，$C_2：x^2+y^2-2x-6y+1=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　C_1 と C_2 の2つの交点を通る直線の方程式を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 の2つの交点，および原点を通る円の方程式を求めよ。

アプローチ

A，B をそれぞれ x，y の多項式として，曲線 $kA+B=0$ が定数 k の値に関係なく定点を通るときの定点の座標を $(x,\ y)$ とすると

「$kA+B=0$ が定数 k の値に関係なく定点 $(x,\ y)$ を通る」$\Longleftrightarrow$「$(x,\ y)$ が $A=0$，$B=0$ を満たす」

したがって，2つの円 $x^2+y^2+\ell x+my+n=0$，$x^2+y^2+\ell' x+m'y+n'=0$ が2点で交わるとき，方程式 $k(x^2+y^2+\ell x+my+n)+(x^2+y^2+\ell' x+m'y+n')=0$　(k は定数)は，k の値に関係なく2つの円の交点を通る図形を表す。この式の左辺の x^2，y^2 の係数は，どちらも $k+1$ なので，この方程式は，

(Ⅰ)：$k=-1$ のとき，x，y の1次式となり，2つの円の交点を通る直線を表す。

(Ⅱ)：$k \neq -1$ のとき，2つの円の交点を通る円を表す。(ただし，円 $x^2+y^2+\ell x+my+n=0$ を除く)

このとき，方程式 $k(x^2+y^2+\ell x+my+n)+(x^2+y^2+\ell' x+m'y+n)=0$

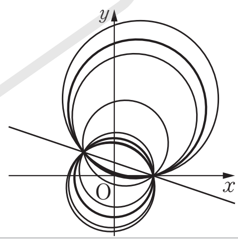
が表す図形は右の図のようになる。

本問では，$k(x^2+y^2-3)+(x^2+y^2-2x-6y+1)=0$　……①　とする。このとき

$x^2+y^2-3=0$　……②，$x^2+y^2-2x-6y+1=0$　……③

を連立方程式とみて解くと，2点 $\left(\dfrac{2+3\sqrt{26}}{10},\ \dfrac{6-\sqrt{26}}{10}\right)$，$\left(\dfrac{2-3\sqrt{26}}{10},\ \dfrac{6+\sqrt{26}}{6}\right)$ が得られる。

この2点は，2つの円②，③の交点の座標であるが，これらの値を使って，直線や円の方程式を求める計算は少々複雑なので，曲線①が，2つの円の交点を通る図形の方程式を表すことを利用する。



(1)　2つの円の交点を通る直線の方程式を求めるので，$k=-1$ を①に代入する。

(2)　①に通る点の x 座標，y 座標を代入することで，条件を満たすときの k の値を求め，その k の値を①に代入する。

解答

k を定数として，$k(x^2+y^2-3)+(x^2+y^2-2x-6y+1)=0$　……①　とすると，①は，2つの円 C_1，C_2 の2つの交点を通る図形である。

(1)　$k=-1$ を①に代入すると，$-(x^2+y^2-3)+(x^2+y^2-2x-6y+1)=0$　　$x+3y-2=0$

したがって，求める直線の方程式は，$x+3y-2=0$

(2)　①が原点 $(0,\ 0)$ を通るから，①に $x=0$，$y=0$ を代入して，$-3k+1=0$　　$k=\dfrac{1}{3}$

$k=\dfrac{1}{3}$ を①に代入すると，$\dfrac{1}{3}(x^2+y^2-3)+(x^2+y^2-2x-6y+1)=0$　　$x^2+y^2-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{9}{2}y=0$

したがって，求める円の方程式は，$x^2+y^2-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{9}{2}y=0$

類題1　次の問いに答えよ。

(1)　円 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ と直線 $4x+2y=5$ の交点を通り，原点 $(0,\ 0)$ を中心とする円の方程式を求めよ。

(2)　次の問いに答えよ。

(i)　中心が $(a,\ b)$，半径が2の円の方程式を求めよ。

(ii)　円 $x^2+y^2=9$ と，(i)の円との2つの共有点を通る直線の方程式が $6x+2y-15=0$ となるような値の組 $(a,\ b)$ を求めよ。

(iii)　(ii)の2つの共有点と原点とを通る円の方程式を求めよ。

入試例題 2 実数の存在条件を利用する軌跡

xy 平面上の 2 直線 $tx-y=t$ ……①，$x+ty=-2t-1$ ……②の交点をPとする。
t が任意の実数値をとって変わるとき，点Pが描く軌跡を求めよ。

アプローチ

一般に，点P$(x,\ y)$の軌跡は，x，y をそれぞれ文字定数(ここでは t)で表し，文字定数を消去することで求めることができる。しかし，この問題では，①，②を連立して x，y を求めると

$$x=1-\frac{2(t+1)}{t^2+1},\quad y=\frac{-2(t-1)}{t^2+1}-2$$

となり，ここから t を消去する計算は複雑である。

そこで，「2 直線の交点Pが存在するならば，2 直線の式をともに満たす実数 t が存在する」ことを利用して軌跡を求める。このとき，①を満たす t が，②の式を満たすと考えて，①を t について解き，②に代入して t を消去して，x と y の関係式を導く。

①を t について解くとき，両辺を 0 で割ることができないため，(i)$x\neq1$ と(ii)$x=1$ で場合分けが必要になる。その際，$x=1$ のときは $y=0$ を満たすことが実数 t が存在するための必要条件であることに注意する。

解答

(i) $x\neq1$ のとき，①より，$t=\dfrac{y}{x-1}$

これを②に代入すると

$$x+\frac{y}{x-1}\cdot y=-2\cdot\frac{y}{x-1}-1$$

分母を払って整理すると

$x^2+y^2+2y-1=0$　　$x^2+(y+1)^2=2$

よって，交点は円 $x^2+(y+1)^2=2$ 上にある。

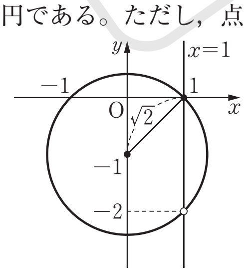
ただし，$x\neq1$ であるから，この円上の 2 点 $(1,\ 0)$，$(1,\ -2)$を除く。

(ii) $x=1$ のとき，①より，$y=0$

これらを②に代入すると，$t=-1$

したがって，点$(1,\ 0)$は $t=-1$ の場合の 2 直線①，②の交点である。

(i)，(ii)より，点Pの軌跡は，中心が点$(0,\ -1)$，半径が$\sqrt{2}$の円である。ただし，点$(1,\ -2)$を除く。



(別解)

①より，$(x-1)t-y=0$ であるから，直線①は t の値に関わらず点$(1,\ 0)$を通る。②より，$(y+2)t+x+1=0$ であるから，直線②は t の値に関わらず点$(-1,\ -2)$を通る。

また，2 直線①，②は垂直である。

よって，2 直線①，②の交点は，2 点$(1,\ 0)$，$(-1,\ -2)$を結ぶ線分を直径とする円上にある。

一方，直線①は，点$(1,\ 0)$を通る直線のうち，直線 $x=1$ のみ表さない。

また，直線②は，点$(-1,\ -2)$を通る直線のうち，直線 $y=-2$ のみ表さない。

したがって，求める軌跡は，円 $x^2+(y+1)^2=2$ から 2 直線 $x=1$，$y=-2$ の交点$(1,\ -2)$を除いた図形である。

類題 2　k を実数とする。xy 平面において，直線 $y=kx+1$ に関して原点Oと対称な点をPとする。k が実数全体を動くとき，点Pの軌跡を求め，xy 平面に図示せよ。

入試発展演習

STEP 1

1 aを正の定数とする。座標平面において，円K_1は中心がA$(a,\ 2)$であり，x軸および直線ℓ：$3x-4y+9=0$に接している。次の問いに答えよ。

(1) K_1の半径を求めよ。

(2) aの値を求めよ。

(3) ℓとx軸の交点をB，K_1とx軸の接点をCとするとき，3点A，B，Cを通る円K_2の方程式を求めよ。

(4) (3)で求めたK_2とK_1の2つの交点および原点を通る円K_3の方程式を求めよ。

2 kは定数とする。

直線ℓ：$(2k+1)x+(k+2)y-5k+2=0$と円C：$x^2+y^2-2x=0$がある。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線ℓがkの値にかかわらず通る定点の座標を求めよ。

(2) 直線ℓが円Cに接するときの接点をP，Qとするとき，直線PQの方程式を求めよ。

3 aを正の実数とし，$a\neq1$とする。また，xy平面上の円$x^2+y^2+6ax-2ay+20a-10=0$をCとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 円Cの中心はある直線上にある。この直線の式を求めよ。

(2) 円Cと円$x^2+y^2=5$が外接するとき，aの値を求めよ。

4 xy平面において2つの円

C_1：$x^2-2x+y^2+4y-11=0$,

C_2：$x^2-8x+y^2-4y+k=0$

が外接するとし，その接点をPとする。次の問いに答えよ。

(1) kの値を求めよ。

(2) Pの座標を求めよ。

(3) 円C_1と円C_2の共通接線のうち点Pを通らないものは2本ある。これら2直線の交点Qの座標を求めよ。

5 座標平面において，点A$(1,\ 1)$，B$(1,\ 0)$をとる。kを実数として，点Aを通り，傾きがkである直線を考える。この直線に関する点Bの対称点をPとする。次の問いに答えよ。

(1) $k=1$のとき，点Pの座標を求めよ。

(2) kが実数全体を動くとき，点Pの軌跡を求めよ。

6 連立不等式 $\begin{cases} y \geqq |2x+1| \\ 2x-3y+9 \geqq 0 \end{cases}$ の表す領域を D とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，x^2-4x+y^2 の最大値 M と最小値 m を求めよ。また，M，m を与える D 内の点の座標を求めよ。

7 不等式 $(x-6)^2+(y-4)^2 \leqq 4$ の表す領域を点P$(x,\ y)$が動くものとする。次の問いに答えよ。

(1) x^2+y^2 の最大値を求めよ。

(2) $\dfrac{y}{x}$ の最小値を求めよ。

(3) $x+y$ の最大値を求めよ。

STEP 2

1 円 C : $x^2+y^2-10x-10y+40=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) 原点を通り，円 C と接する直線の方程式を求めよ。

(2) (1)の 2 つの直線と円 C のすべてに接するような円のうち，最も小さい円の半径を求めよ。

2 Oを原点とする座標平面において，C_1 は x 軸に接する半径 2 の円で，その中心Aの x 座標 a は $2<a \leqq 4$ を満たすとする。また，C_2 は y 軸および C_1 に接する半径 1 の円で，その中心Bの y 座標 b は $b \geqq 2$ を満たすとする。さらに，C_1 と C_2 の接点Pを通る C_1，C_2 の共通接線 ℓ の傾きは 2 であるとする。次の問いに答えよ。

(1) a と b を求めよ。

(2) ℓ の方程式を求めよ。

(3) △OABの面積を求めよ。

3 C を座標平面上の円 $x^2+y^2=1$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 $(a,\ b)$ を中心とし，C に外接する円の半径を a，b の式で表せ。

(2) C に外接し，直線 $y=3$ に接する円の中心の軌跡の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた軌跡の方程式を $y=f(x)$ とする。点 $(x,\ y)$ が不等式 $y \leqq f(x)$ の表す座標平面上の領域を動くとき，$x+2y$ の最大値とそのときの x，y の値を求めよ。