

第4講

場合の数と確率

入試標準演習

1 次の ~ にあてはまる数を答えよ。

正十角形 ABCDEFGHIJ において、この正十角形の10個の頂点から3点を結んで三角形を作る。このとき、次のことがいえる。

- (1) 三角形は全部で 個ある。
- (2) 二等辺三角形は全部で 個ある。
- (3) 直角三角形は全部で 個あるか。
- (4) 正十角形と一辺だけを共有する三角形は全部で 個あるか。
- (5) 正十角形と辺を共有しない三角形は全部で 個あるか。

2 TOHOKU という単語に関して、次の問いに答えよ。

- (1) 6文字をすべて使ってできる順列は全部で何通りあるか。
- (2) (1)の文字列を英和辞典の単語の順序に従って並べたときに18番目の文字列は何か。
- (3) (1)の文字列を英和辞典の単語の順序に従って並べたときに TOHOKU は何番目に現れるか。

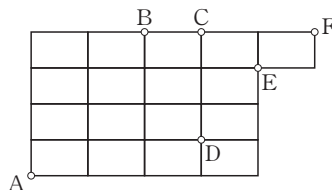
3 次の , にあてはまる数を答えよ。

A, B, C の3カ国から4人ずつ12人が集まった。

- (1) A, B の2カ国から1人ずつ選んでできる2人の組を4組作る方法は 通りある。
- (2) A, B, C の3カ国から1人ずつ選んでできる3人の組を4組作る方法は 通りある。

4 次の ~ にあてはまる数を答えよ。

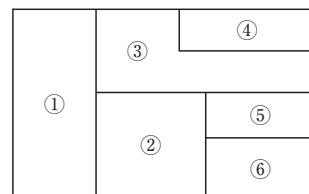
下の図のような道のある町がある。



- (1) 地点Aから地点Cまでの最短の道順は 通りであり、このうち地点Bを通らない最短の道順は 通りである。
- (2) 地点Aから地点Eまでの最短の道順のうち、地点Dを通るものは 通りである。
- (3) 地点Aから地点Fまでの最短の道順は 通りである。このうち、地点B, C, D, Eの2つ以上を通らない最短の道順は 通りである。

5 次の ~ にあてはまる数を答えよ。

図の①から⑥の6つの部分を色鉛筆を使って塗り分ける方法について考える。ただし、1つの部分は1つの色で塗り、隣り合う部分は異なる色で塗るものとする。



- (1) 6色で塗り分ける方法は、通りである。
- (2) 5色で塗り分ける方法は、通りである。
- (3) 4色で塗り分ける方法は、通りである。
- (4) 3色で塗り分ける方法は、通りである。

6 次の , にあてはまる数を答えよ。

1, 1, 1, 2, 3, 4の6個の数字を並べて6桁の自然数 n をつくるとき、 n が奇数である確率は であり、 n が320000以上である確率は である。

7 次の ~ にあてはまる数を答えよ。

1個のさいころを3回投げる。1回目に出た目を a , 2回目に出た目を b , 3回目に出た目を c とする。

- (1) a, b, c がすべて異なる確率は である。
- (2) a, b, c の積 abc が偶数である確率は であり、積 abc が4で割り切れる確率は である。
- (3) a, b, c の和 $a+b+c$ が5で割り切れる確率は である。

8 次の ~ にあてはまる数を答えよ。

3つのさいころを同時に投げる。

- (1) 出る目がすべて同じになる確率は , すべて異なる確率は である。出る目のうちちょうど2つが一致し他は異なる確率は である。
- (2) 出る目の最小値が3以上となる確率は , 最小値が3となる確率は , 最小値が3で最大値が5となる確率は である。

9 A, Bの2人が試合を行う。1回の試合でAが勝つ確率は $\frac{2}{3}$, Bが勝つ確率は $\frac{1}{3}$ である。引き分けはないものとする。次の問いに答えよ。

- (1) 先に3試合勝った人を優勝とすると、Aが優勝する確率を求めよ。
- (2) 一方が他方よりも2試合多く勝ったところで、多く勝った方の人を優勝とする。4試合目までにAが優勝する確率を求めよ。

10 AとBの2つの袋がある。Aには赤球が2個と白球が2個入っており、Bには赤球が1個と白球が3個入っている。今いずれかの袋から1個、球を取り出したところ、赤球であった。それが袋Aから取り出された確率と袋Bから取り出された確率を、それぞれ求めよ。ただし、いずれの袋を選ぶのかは同様に確からしいとする。

入試例題 1 大小関係が決まった整数の順列

整数の組 (x_1, x_2, x_3) について、次の問いに答えよ。

- $1 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq 6$ となるような組み合わせは何通りか。
- $1 \leq x_1 \leq x_2 < x_3 \leq 6$ となるような組み合わせは何通りか。

アプローチ

大小関係が決まった整数の順列を考えるときは、とりうるすべての整数の集合から必要な個数を選び、小さい順に並べると考えて、その組み合わせを求めることを考える。

(2)では、 $x_1 = x_2$ の場合が含まれるため、「 a, b が整数のとき、 $a \leq b \iff a < b + 1$ 」を利用して、条件に含まれる等号をなくすことで、(1)の考えに帰着させて、1から7までの整数の中から3つの整数を選ぶ組み合わせを求める。このとき、「 $a \leq b$ を満たす整数 (a, b) の組み合わせの数」と「 $a < b + 1$ を満たす整数 $(a, b + 1)$ の組み合わせの数」は一致することに注意する。

また、1から5までの整数の中から重複を許して3つの整数を選ぶ組み合わせを求める、もしくは、「 $x_1 \leq x_2 < x_3$ 」を、「 $x_1 < x_2 < x_3$ 」と「 $x_1 = x_2 < x_3$ 」の場合に分けて考えて求めることもできる。

解答

- (1) 1から6までの6個の数字から異なる3個を選び、小さい方から順に x_1, x_2, x_3 とすればよいから、求める場合の数は

$${}_6C_3 = 20 \text{ (通り)}$$

- (2) $1 \leq x_1 \leq x_2 < x_3 \leq 6$ は、 $1 \leq x_1 < x_2 + 1 < x_3 + 1 \leq 7$ とできる。

よって、(1)と同様に1から7までの7個の数字から異なる3個を選び、小さい方から順に $x_1, x_2 + 1, x_3 + 1$ とすればよいから、求める場合の数は

$${}_7C_3 = 35 \text{ (通り)}$$

(別解1)

1から5までの5個の数字から重複を許して3個を選び、小さい方から順に $x_1, x_2, x_3 - 1$ とすれば、 $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 - 1 \leq 5$ となる。このとき、 $1 \leq x_1 \leq x_2 < x_3 \leq 6$ だから、このような x_1, x_2, x_3 の選び方が何通りあるかを求めればよいので、求める場合の数は

$${}_{5+3-1}C_3 = {}_7C_3 = 35 \text{ (通り)}$$

(別解2)

$x_1 = x_2 < x_3$ となる場合を考えると、1から6までの6個の数字から異なる2個を選び、小さい方から順に $x_1 (= x_2), x_3$ とすればよいから

$${}_6C_2 = 15 \text{ (通り)}$$

これと(1)より、 $1 \leq x_1 \leq x_2 < x_3 \leq 6$ となる場合の数は

$$20 + 15 = 35 \text{ (通り)}$$

類題 1 0から9までの番号をつけた10枚のカードがある。このとき、次の問いに答えよ。

- 同時に2枚のカードを取るとき、その番号の積が30以上となる確率を求めよ。
- カードを1枚取り、番号を見てもとに戻さないという試行を3回繰り返す。1回目に取り出したカードの番号を a 、2回目に取り出したカードの番号を b 、3回目に取り出したカードの番号を c とするとき、 $a < b < c$ となる確率を求めよ。
- カードを1枚取り、番号を見てもとに戻すという試行を3回繰り返す。1回目に取り出したカードの番号を a 、2回目に取り出したカードの番号を b 、3回目に取り出したカードの番号を c とするとき、 $a \leq b \leq c$ となる確率を求めよ。

入試例題 2 確率の最大値

n を 9 以上の自然数とする。袋の中に n 個の球が入っている。このうち 6 個は赤球で残りは白球である。この袋から 6 個の球を同時に取り出すとき、3 個が赤球である確率を P_n とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) P_9, P_{10}, P_{15} を求めよ。
- (2) $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ を n の式で表せ。
- (3) P_n が最大となる n を求めよ。

アプローチ

確率 P_n の最大・最小は、隣り合う確率 P_n と P_{n+1} の大小関係を調べることにより求められる。方法としては、比 $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ と 1 との大小を調べる、または、差 $P_{n+1} - P_n$ の符号を調べる、の 2 通りある。

(2) では、組合せの総数 ${}_nC_r$ を用いることで、確率 P_n をその式で表すことができるから、 P_n の n に $n+1$ を代入して P_{n+1} を得る。このとき、確率 P_n, P_{n+1} は文字を含む階乗の式で表されるから、確率の比を用いることで、階乗で表された式の一部を約分することができ、計算しやすくなる。

(3) 確率 P_n と P_{n+1} の大小関係を調べる際は、答えに適する n が複数存在する可能性があるため、

$\frac{P_{n+1}}{P_n} = 1$ となる n が存在するかどうか確認する。

解答

$$(1) \quad P_9 = \frac{{}_6C_3 \cdot {}_3C_3}{{}_9C_6} = \frac{5}{21} \quad P_{10} = \frac{{}_6C_3 \cdot {}_4C_3}{{}_{10}C_6} = \frac{8}{21}$$

$$P_{15} = \frac{{}_6C_3 \cdot {}_9C_3}{{}_{15}C_6} = \frac{48}{143}$$

(2) $n \geq 9$ のとき

$$P_n = \frac{{}_6C_3 \cdot {}_{n-6}C_3}{{}_nC_6}, \quad P_{n+1} = \frac{{}_6C_3 \cdot {}_{n-5}C_3}{{}_{n+1}C_6}$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}}{P_n} &= \frac{{}_6C_3 \cdot {}_{n-5}C_3}{{}_{n+1}C_6} \times \frac{{}_nC_6}{{}_6C_3 \cdot {}_{n-6}C_3} \\ &= \frac{(n-5)!}{3!(n-8)!} \times \frac{6!(n-5)!}{(n+1)!} \\ &\quad \times \frac{n!}{6!(n-6)!} \times \frac{3!(n-9)!}{(n-6)!} \\ &= \frac{n-5}{n-8} \times \frac{n-5}{(n+1)} = \frac{(n-5)^2}{(n+1)(n-8)} \end{aligned}$$

(3) $\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1$ のとき

$$\frac{(n-5)^2}{(n+1)(n-8)} > 1$$

$n \geq 9$ のとき $(n+1)(n-8) > 0$ であるから両辺に正の数 $(n+1)(n-8)$ をかけると

$$(n-5)^2 > (n+1)(n-8) \quad n < 11$$

したがって

$$9 \leq n \leq 10 \text{ のとき, } P_n < P_{n+1}$$

$$n = 11 \text{ のとき, } P_n = P_{n+1}$$

$$12 \leq n \text{ のとき, } P_n > P_{n+1}$$

すなわち

$$P_9 < P_{10} < P_{11} = P_{12} > P_{13} > \dots$$

よって、 P_n が最大となる n の値は

$$n = 11, 12$$

類題 2 青球 6 個と赤球 n 個 ($n \geq 2$) が入っている袋から、3 個の球を同時に取り出すとき、青球が 1 個で赤球が 2 個である確率を P_n とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) P_n を n の式で表せ。
- (2) $P_n > P_{n+1}$ をみたす最小の n を求めよ。
- (3) P_n を最大にする n の値を求めよ。

入 試 発 展 演 習

STEP・1

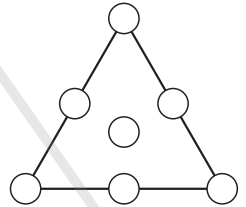
1 一辺の長さが1の立方体がある。この立方体の8個の頂点から異なる3個を選び、これらを頂点とする三角形をつくる。次の問いに答えよ。

- (1) 三角形は全部で何個できるか。
- (2) 直角三角形は全部で何個できるか。
- (3) 面積が $\frac{7}{10}$ 以上である三角形は全部で何個できるか。
- (4) つくる三角形の面積の期待値を求めよ。

2 右の図は正三角形の3つの頂点、重心および辺上に同じ大きさの円を描いたものである。辺上の円は図では各辺の midpoint に描かれている。次の問いに答えよ。

重心のまわりに回転して同じ配列になる並べ方は1通りと数える。

- (1) 1から7の自然数が1つずつ書かれた球を、図の円のところに1つずつ並べる。1が頂点に置かれる並べ方は何通りか。また、並べ方は全部で何通りか。



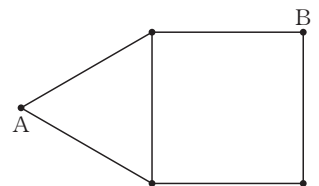
以下、同じ色の球は区別しないものとする。

- (2) 白球1個、赤球6個を図の円のところに1つずつ並べる並べ方は何通りか。また、白球2個、赤球5個を図の円のところに1つずつ並べる並べ方は何通りか。
- (3) 白球3個、赤球4個を図の円のところに1つずつ並べる並べ方は何通りか。
- (4) 7個の白球または赤球を図の円のところに1つずつ並べる並べ方は何通りか。ただし、どちらかの色のみであってもよいものとする。

3 m を4以上の自然数とする。赤玉 m 個と青玉 m 個の計 $2m$ 個の玉を袋に入れる。袋から玉を1個ずつ続けて4個取り出す。最初の2個の玉を取り出したとき赤玉と青玉が同数という事象を A とする。4個の玉を取り出したとき赤玉と青玉が同数という事象を B とする。以下では事象 A が起こる確率を $P(A)$ などと表す。次の問いに答えよ。

- (1) 確率 $P(A)$, $P(B)$ をそれぞれ m で表せ。
- (2) 確率 $P(A \cap B)$ を m で表せ。
- (3) 事象 A も B も起こらない確率を m で表せ。

4 右の図のような道路網がある。毎日、6つの区間のそれぞれは確率 $\frac{1}{2}$ で通行止めとなる。ある日にAからBまで行くことのできる確率を求めよ。



5 袋の中に1から5までの番号をつけた5個の玉が入っている。この袋から玉を1個取り出し、番号を調べてからもとに戻す試行を、4回続けて行う。 n 回目 ($1 \leq n \leq 4$) に取り出された玉の番号を r_n とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \leq 8$ となる確率を求めよ。
- (2) $\frac{4}{r_1 r_2} + \frac{2}{r_3 r_4} = 1$ となる確率を求めよ。

6 ある工場で作られた製品が大量に保管されている。その中の90%が良品，10%が不良品であるという。この製品の品質検査では，不良品を不合格とする確率が94.5%，良品を誤って不合格とする確率が10.5%である。このとき，次の問いに答えよ。

- (1) 保管されている製品の中から1個を取り出して品質検査を1回行う。品質検査の結果が不合格である確率を求めよ。
- (2) 保管されている製品の中から1個を取り出して品質検査を1回行う。品質検査の結果が不合格であるとき，その製品が不良品である条件付き確率を求めよ。
- (3) 保管されている製品の中から1個を取り出して品質検査を2回行う。品質検査の結果が2回とも不合格であるとき，その製品が不良品である条件付き確率を求めよ。

7 xy 平面上で2点A，Bの移動を考える。最初2点は，Aが原点(0, 0)，Bが点(3, 3)にあるとし，以降，大きなコイン1枚と小さなコイン1枚を同時に投げて，次の規則に従って2点を移動する操作を行う。

(規則) Aが点(p , q)，Bが点(r , s)にあるとき，

- ・Aは，大きなコインの表裏によって移動し，大きなコインが表ならば点(p , $q+1$)へ，裏ならば($p+1$, q)へ移動する。
- ・Bは，小さなコインの表裏によって移動し，小さなコインが表ならば点(r , $s-1$)へ，裏ならば($r-1$, s)へ移動する。

次の問いに答えよ。

- (1) 操作を3回繰り返したあとに，AとBが同じ点にある確率を求めよ。
- (2) 操作を6回繰り返してAが点(3, 3)，Bが点(0, 0)にあるとき，3回目の操作の終了時にA，Bが同じ点にあった確率を求めよ。

STEP・2

1 1, 2, 11, 12の数字の1つが書かれたボールが各1個ずつ袋の中に入っている。この袋からボールを1個取り出してボールの数字を書きとめ，ボールを袋に戻す操作を3回行う。3つの数字を取り出した順に左から右に並べて1つの整数を作る。例えば1, 2, 2の書かれたボールが順に取り出された場合は3桁の整数122が，11, 12, 1の書かれたボールが順に取り出された場合は5桁の整数11121ができる。次の問いに答えよ。

- (1) できた整数が4の倍数となる確率を求めよ。
- (2) できた整数が3の倍数となる確率を求めよ。
- (3) 何通りの整数を作ることができるか。

2 太郎は15個の球を，花子は21個の球を持っている。ここから始めて，次の手順による球のやり取りを，2人の間で繰り返す。

【1】 2個のさいころを同時に投げる。

【2】 ① 2個とも奇数の目が出たら，太郎が花子に1個の球を渡す。

② 2個とも偶数の目が出たら，太郎が花子に2個の球を渡す。

③ 奇数の目と偶数の目が1個ずつ出たら，花子が太郎に3個の球を渡す。

この手順【1】，【2】によるやり取りを，7回繰り返す。その結果，太郎と花子が持つ球の個数について，次の問いに答えよ。

- (1) 太郎と花子が同数の球を持っている確率を求めよ。
- (2) 持っている球の数が，太郎と花子の2人とも最初と変わらない確率を求めよ。
- (3) 太郎が持っている球の数が，花子が持っている球の数の半分である確率を求めよ。