

はじめに

本テキストは、皆さんが大学入試に通用する実戦力を養成できるよう編集してあります。

取り上げる分野は高校1年で学ぶ数学Ⅰと数学A、同じく高校2年で学ぶ数学Ⅱと数学Bで、最重要分野を網羅するように編集されています。

数多くの問題の演習を行うことで、どんな入試問題にも対応し、そして高得点を確保できるよう工夫されています。

また、『解答解説』では、ページの許す限り詳しい解説を加え、合わせて(別解)や(注)など、問題を解く上でのポイントもお知らせしています。

数学は暗記だけでは対応できない科目です。皆さんが、本テキストの学習を通じ、公式や法則の正しい利用法と正解へのアプローチ・プロセスを体得し、志望校への栄えある合格を勝ち取られることを願ってやみません。

構成と活用法

本テキストは、次のように構成されています。

- ▶ **演習問題A** ここに集めてある問題は、演習問題Bに取り組む前にこれだけは押さえておきたいという、必要最低限のレベルです。解けた場合も、そうでない場合も、正解に至るまでの解法を必ず確認しましょう。
- ▶ **演習問題B** 標準から発展レベルの問題を収録してあります。これまで学んだ知識・解法をどのように応用していけばよいかを考えながら、問題に向かうと効果的です。

❖ もくじ — 大学受験β 数学Ⅰ・A/Ⅱ・B

1	総合演習(1) 【数と式, 2次関数, 整数】	2
2	総合演習(2) 【§1 ベクトル】	9
	【§2 図形と式】	13
3	総合演習(3) 【§1 指数・対数・三角関数】	17
	【§2 微分法・積分法】	21
4	総合演習(4) 【§1 数列】	25
	【§2 場合の数・確率】	29

【§ 1 ベクトル】

演習問題 A

1 平面上の三角形ABCと点Pは、 $\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ を満たしている。これについて、次の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{AP} を \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AC} で表せ。
- (2) 三角形PAB, 三角形PBC, 三角形PCAの面積比を求めよ。

2 $\triangle ABC$ の辺ABの中点をP, 辺ACを2:1に内分する点をQとし、線分BQと線分CPの交点をRとする。これについて、次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \overrightarrow{AR} をベクトル \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} を用いて表せ。
- (2) 直線ARと線分BCとの交点をSとすると、BS:SCを求めよ。

3 ベクトル \vec{a} , \vec{b} について、 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{a}+3\vec{b}|=3$ とする。このとき $|3\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求めよ。

4 平面上の2つのベクトルを $\vec{a}=(7, 6)$, $\vec{b}=(8, 4)$ とする。ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小となるときの t の値を求めよ。

5 $OA=4$, $OB=3$, $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=4$ である三角形 OAB に対して, $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$ とする。このとき, 三角形 OAB の垂心を H として, \vec{OH} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。

6 四面体 $OABC$ において, 辺 AC の中点を P , 線分 PB の中点を Q とし, 線分 CQ の延長と辺 AB との交点を R とする。これについて, 次の問いに答えよ。

(1) $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ とするとき, \vec{OQ} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} を用いて表せ。

(2) $AR:RB$ および $CQ:QR$ を求めよ。

7 a, c を実数とする。空間内の4点 $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, a)$, $B(2, 1, 5)$, $C(0, 1, c)$ が同一平面上にあるとき, c を a で表せ。

演習問題 IB

1 平面上に三角形ABCがあり、その内部に点Pがある。線分APの中点を P_1 、線分 P_1B の中点を P_2 、線分 P_2C の中点を Q とする。また、線分BQの中点を Q_1 、線分 Q_1A の中点を Q_2 、線分 Q_2C の中点を M とする。点Mが線分PQの中点と一致するとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\vec{a}=\vec{CA}$, $\vec{b}=\vec{CB}$ とするとき、 \vec{CP} と \vec{CQ} を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。
- (2) 三角形PACと三角形ABCの面積比を求めよ。

2 $\vec{a}=(3, \sqrt{3})$, $\vec{b}=(4, 2\sqrt{3})$ を座標平面上のベクトルとし、 L を $m\vec{a}+n\vec{b}$ (m, n は整数)の形に表されるベクトル全体のなす集合とする。

このとき、 L に属する $\vec{0}$ でないベクトルの中でその大きさが最小となるものをすべて求めよ。

3 三角形OABの内部の点Pに対して、2点Q, Rを次の条件を満たすようにとる。これについて、あとの問いに答えよ。

(A) $\vec{PQ}=m\vec{PA}$, $\vec{PR}=n\vec{PB}$, $m>0, n>0$

(B) Pは三角形OQRの重心である。

- (1) ベクトル \vec{OP} を \vec{OA} , \vec{OB} および m, n を用いて表せ。
- (2) 直線OPとABの交点をSとすると、 \vec{OS} を \vec{OA} , \vec{OB} および m, n を用いて表せ。
- (3) Sが三角形PQRの重心となるとき、 $m+n$ の値を求めよ。

4 点P, Qはそれぞれ直線AB, CD上を等速度 \vec{u} , \vec{v} で進む(出発点はそれぞれA, CでOはACの中点)。これについて、次の問いに答えよ。

- (1) $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OR}=\vec{x}$ (RはPQを1:2に内分する点)として、Rの軌跡をベクトル方程式で表せ。
- (2) PQの長さが最短となるときの \vec{x} を求めよ。

5 OA=3, OB=4である三角形OABにおいて、辺OAを1:2に内分する点をP, 辺OBを3:2に内分する点をQとする。さらに、線分AQを5:1に内分する点をRとする。これについて、次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \overrightarrow{BR} をベクトル \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} を用いて表せ。
- (2) 点Rは線分BP上にあることを示せ。
- (3) $AQ \perp BP$ であるとき、内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を求めよ。

6 正四面体ABCDの辺AB, AC, AD, BC, CD, DBの中点を、それぞれ、M, P, Q, R, S, Tとし、 $\overrightarrow{MP}=\vec{p}$, $\overrightarrow{MQ}=\vec{q}$, $\overrightarrow{MR}=\vec{r}$ とする。これについて、次の問いに答えよ。

- (1) \overrightarrow{MS} を \vec{q} , \vec{r} で表せ。
- (2) \overrightarrow{PS} を \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} で表せ。
- (3) 内積 $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{PS}$ を計算して、 $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{PS}$ を示せ。

7 座標空間に2点A(1, 2, 3), B(4, 3, 5)をとり、線分ABを1辺とする正四面体ABCDを考えるものとする。これについて、次の問いに答えよ。

- (1) $|\overrightarrow{AB}|=\square{\text{ア}}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}=\square{\text{イ}}$ である。
- (2) 辺ABを $t:(1-t)$ [$0 < t < 1$]に内分する点をPとすると、 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{PD}=\square{\text{ウ}}$, $|\overrightarrow{PC}|^2=\square{\text{エ}}$ となり、 $\theta = \angle CPD$ とおくと、 $\cos \theta = \square{\text{オ}}$ となる。したがって、 $\cos \theta$ は $t=\square{\text{カ}}$ のとき最小値 $\square{\text{キ}}$ をとる。

【§2 図形と式】

演習問題 A

1 a は定数とする。直線 $l: (1+3a)x - (2+a)y = 2-9a$ について、次の問いに答えよ。

- (1) a の値にかかわらず直線 l が通る定点を求めよ。
- (2) 直線 l が第1象限を通るとき、 a の値の範囲を求めよ。

2 xy 平面において、点 (x_0, y_0) と直線 $ax+by+c=0$ の距離は $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。これを証明せよ。

3 方程式 $x^2+2mx+y^2-2(m+1)y+3m^2-3m+5=0$ が円を表すとき、次の問いに答えよ。

- (1) m の値の範囲を求めよ。
- (2) 半径が最大となる m の値を求めよ。

- 4 円 $x^2+y^2=4$ に点 $(12, 0)$ から接線をひくとき、接点の座標を求めよ。
- 5 2つの円 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$, $x^2+(y-k)^2=10$ の交点を、 P , Q とする。線分 PQ の長さを最大にする k の値を求めよ。
- 6 a は 0 でない定数とし、 b と c を定数とする。 k がすべての実数を動くとき、 xy 平面上の直線 $\ell: y=kx+k^2+3k+1$ は常に放物線 $C: y=ax^2+bx+c$ に接するものとする。これについて、次の問いに答えよ。
- (1) a , b , c の値を求めよ。
 - (2) 直線 ℓ と放物線 C の接点を P とするとき、原点 O と点 P を結ぶ線分 OP の中点 $Q(s, t)$ の軌跡の方程式を求めよ。
- 7 放物線 $y=-x^2$ を平行移動した放物線 C が次の 2 つの条件を満たすとする。
- (i) C は放物線 $y=x^2$ と共有点をもたない。
 - (ii) x 座標が正の部分で、 C は直線 $y=-1$ と異なる 2 つの共有点をもつ。
- このとき、 C の頂点の存在範囲を図示せよ。

演習問題 IB

- 1 xy 平面において、方程式 $x^2+y^2-x-2y+1=0$ の表す曲線を C とする。これについて、次の問いに答えよ。
- (1) 曲線 C は、中心 、半径 の円である。円 C 上の点 P と原点 O との距離が最小となるのは、 P の座標が のときであり、このとき、 $OP = \text{$ である。
 - (2) 点 $A(2, 0)$ を考える。点 P が円 C 上を動くときの $OP^2 + AP^2$ の最小値を求めよ。

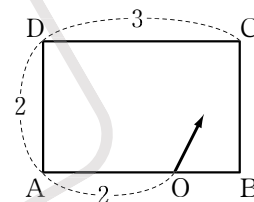
- 2 2つの円 $x^2+y^2=1$ と $(x-2)^2+y^2=4$ の共通接線の方程式を求めよ。

- 3 2つの円 $x^2+y^2-4x+6y-7=0$ 、 $x^2+y^2-10x-12y+11=0$ について、次の問いに答えよ。
- (1) 2つの円の交点 A 、 B を通る直線の方程式を求めよ。
 - (2) 2つの円の交点 A 、 B と点 $C(2, -3)$ を通る円の中心の座標と、半径の長さを求めよ。

- 4 任意の実数 a に対して、曲線 $C_1: y=ax^2-3a$ と円 $C_2: x^2+(y-1)^2=4$ を考える。これについて、次の問いに答えよ。
- (1) C_1 と C_2 の共有する 2 定点 A 、 B の座標を求めよ。
 - (2) C_1 と C_2 が 4 つの異なる共有点 A 、 B 、 P 、 Q をもつとき、 a のとりうる値の範囲を求めよ。
 - (3) (2) のとき、点 P と点 Q の y 座標は同じ値をとるので、それを k とおく。このとき、 k のとりうる値の範囲を求めよ。

5 $x > 0, y > 0, x + y = 1$ で定められる線分 ℓ 上の点 P を中心とし、 x 軸に接する円を考える。点 P が線分 ℓ 上を動くとき、この円の通過する範囲を求め図示せよ。

6 2 辺の長さが 2 と 3 の長方形 $ABCD$ の中をボールが壁に反射しながら動く。辺 AB を 2 : 1 に内分する点 O からボールを打ち出し、壁に反射させながら動かす。ボールが 2 度壁に反射して頂点 C に到達するケースと 3 度反射して C に到達するケースで最も距離の短いときのボールの動いた距離を、それぞれ求めよ。



7 xy 平面上で、放物線 $F: y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a$ について、次の問いに答えよ。ただし、 a は定数とする。

- (1) a が動くとき、放物線 F の頂点の軌跡の方程式を求めよ。
- (2) 点 $A(0, 1), B(-1, 0), C(0, -1), D(1, 0)$ を頂点とする正方形 $ABCD$ が、放物線 F と共有点をもたないような a の値の範囲を求めよ。