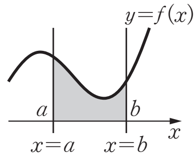
第4講　積分の面積への利用

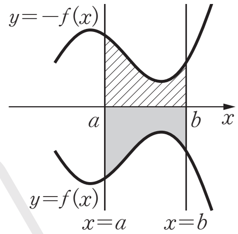
ポイント 1　定積分と図形の面積

x 軸と曲線の間の面積



$a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \geqq 0$ であるとき，$y=f(x)$ のグラフと，x 軸，２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積は

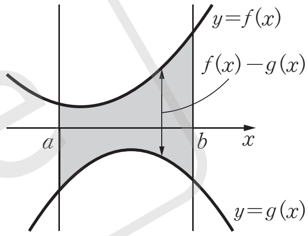
$$\int_a^b f(x)\,dx$$



また，$a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \leqq 0$ であるとき，$y=f(x)$ のグラフと $y=-f(x)$ のグラフが x 軸について対称であることを利用すると，$y=f(x)$ のグラフと，x 軸，２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積は

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$

２曲線間の面積



$a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \geqq g(x)$ のとき，２曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積は

$$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

(注)　与えられた区間において，つねに $f(x) \geqq g(x)$ かどうかわかりづらい場合は，$h(x)=f(x)-g(x)$ とおいて，$h(x)$ の符号を調べることもある。また，被積分関数 $f(x)-g(x)$ は，求めたい図形を y 軸に平行な直線で切り取ったときの切り口の長さである。

チェック 1　次の直線や曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　放物線 $y=3x^2-2x+2$，x 軸，２直線 $x=-1$，$x=2$

(2)　放物線 $y=-x^2+2x-2$，x 軸，２直線 $x=0$，$x=2$

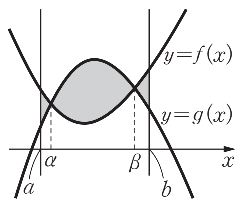
(3)　２つの放物線 $y=2x^2-4x+7$，$y=x^2+1$，２直線 $x=2$，$x=3$

(4)　２つの放物線 $y=x^2-2x+2$，$y=-x^2-2x-3$，２直線 $x=-1$，$x=1$

ポイント 2　複雑な図形の面積

複雑な図形の面積を求めるには，次に示すような方法を用いて，**ポイント 1** の解法が利用できるようにする。

途中で関数のグラフの上下関係が変わる図形



一般に，２曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および２直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積は次の手順で求めればよい。

(i)　方程式 $f(x)=g(x)$ の実数解を求め，２曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の交点の x 座標を求める。

(ii)　$a \leqq x \leqq b$ において積分区間を(i)で求めた x 座標で分割し，分割した区間ごとにグラフが上方にある関数の式から下方にある関数の式を引いて積分する。

右上の図のように，２曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の交点の x 座標が $x=\alpha$，β $(a \leqq \alpha < \beta \leqq b)$ であるとする。
$a \leqq x \leqq \alpha$，$\beta \leqq x \leqq b$ では $f(x) \geqq g(x)$，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ では $f(x) \leqq g(x)$ であるから，求める図形の面積は

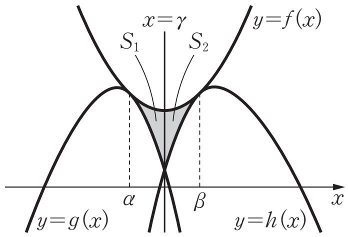
$$\int_a^\alpha \{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_\alpha^\beta \{g(x)-f(x)\}\,dx+\int_\beta^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

3つ以上の曲線で囲まれた図形

3つ以上の曲線で囲まれた図形は，2曲線の上下関係が変わるときの x 座標について，積分区間を分割して面積を求める。

右の図で，$y=g(x)$ と $y=h(x)$ の上下関係が $x=\gamma$ で変わるから，求める図形を直線 $x=\gamma$ で分割すると，求める図形の面積 S は2つの図形の面積 S_1，S_2 の和になる。

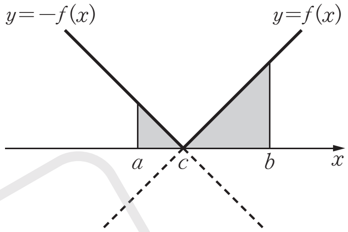
$$S=S_1+S_2=\int_\alpha^\gamma \{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_\gamma^\beta \{f(x)-h(x)\}\,dx$$



絶対値記号のついた関数のグラフで表される図形

$y=|f(x)|$ のグラフと x 軸，2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積を求めるには，$f(x)$ の符号が変わるときの x の値を境にして，積分区間を分割して計算する。

右の図で，$|f(x)|=\begin{cases} f(x)\ (c\leqq x\leqq b \text{ のとき}) \\ -f(x)\ (a\leqq x<c \text{ のとき}) \end{cases}$ であるから，$a\leqq c\leqq b$ のとき，求める図形の面積は，$\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx=\int_a^c \{-f(x)\}\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$



チェック2　次の問いに答えよ。

(1)　放物線 $y=x^2-4x+3$ と，x 軸，y 軸で囲まれた2つの部分の面積の和を求めよ。

(2)　次の直線や曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。

(i)　放物線 $y=x^2$，2直線 $y=2x-1$，$y=-2x-1$　(ii)　放物線 $y=-x^2-x-1$，2直線 $y=x$，$y=-7x+8$

(3)　次の定積分を求めよ。

(i)　$\displaystyle\int_0^3 |x-1|\,dx$　　(ii)　$\displaystyle\int_1^3 |x^2-2x|\,dx$

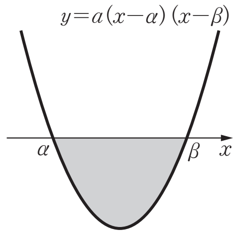
ポイント 3　放物線と x 軸で囲まれた図形の面積

放物線 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ が x 軸と $x=\alpha$，$\beta\ (\alpha<\beta)$ で共有点をもつならば，$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ と表せる。

よって，放物線と x 軸で囲まれた図形の面積 S は

$$S=-\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx=-\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-a\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$　……㊟より，$S=\dfrac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$



(注)　㊟については，以下のように証明できる。

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\int_\alpha^\beta \{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{\alpha+\beta}{2}x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta$$

$$=\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{\alpha+\beta}{2}(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta\}=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

以後の問題では，㊟の計算の結果を断りなく用いることにする。

放物線と直線，放物線と放物線で囲まれた図形の面積を求めるとき，㊟を用いて計算できることが多い。(**例題 1** 参照)

チェック3　次の放物線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)　放物線 $y=x^2-4x-5$　　(2)　放物線 $y=-x^2+x+2$

(3)　放物線 $y=2x^2-7x+3$　　(4)　放物線 $y=-3x^2+5x-2$

例題 1 放物線と直線，放物線と放物線で囲まれた図形の面積

次の直線や曲線によって囲まれた図形の面積を求めよ。

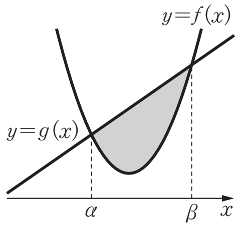
(1) 放物線 $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$，直線 $y=\frac{3}{2}x+2$　　(2) 2つの放物線 $y=x^2-x+1$，$y=-x^2+2x+3$

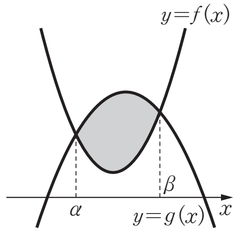
アプローチ

放物線と直線，放物線と放物線で囲まれた図形の面積を考えるときは，**ポイント3**で利用した公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \cdots\cdots ※$$

を用いて，計算を簡単にすることができる。





放物線 $y=f(x)$ と直線(または放物線) $y=g(x)$ の交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。

右の図では，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ で $f(x) \leqq g(x)$ であるから，面積を求める積分の式は，$\int_{\alpha}^{\beta}\{g(x)-f(x)\}\,dx$

ここで，グラフの交点の x 座標 α，β は，方程式 $f(x)=g(x)$ の解だから，2次方程式 $g(x)-f(x)=0$ の解でもあるので，$g(x)-f(x)=-a(x-\alpha)(x-\beta)$　$(a>0)$ と因数分解できる。

よって，面積を求める積分の式は

$$\int_{\alpha}^{\beta}\{g(x)-f(x)\}\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\{-a(x-\alpha)(x-\beta)\}\,dx=-a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

の形に変形できる。

ここで，※を用いて定積分を計算することで，求める面積を簡単に計算することができる。

解答

(1) $\frac{1}{2}x^2+x+1=\frac{3}{2}x+2$ を解くと

$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1=0$　　$\frac{1}{2}(x+1)(x-2)=0$

よって，$x=-1$，2

$-1 \leqq x \leqq 2$ において $\frac{1}{2}x^2+x+1 \leqq \frac{3}{2}x+2$ であるから，求める図形の面積は

$$\int_{-1}^{2}\left\{\left(\frac{3}{2}x+2\right)-\left(\frac{1}{2}x^2+x+1\right)\right\}dx$$

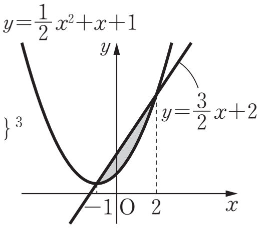
$$=\int_{-1}^{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3$$

$$=\frac{1}{12}\cdot 3^3=\frac{9}{4}$$



(2) $x^2-x+1=-x^2+2x+3$ を解くと

$2x^2-3x-2=0$　　$(2x+1)(x-2)=0$

よって，$x=-\frac{1}{2}$，2

$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq 2$ において $x^2-x+1 \leqq -x^2+2x+3$ であるから，求める図形の面積は

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\{(-x^2+2x+3)-(x^2-x+1)\}\,dx$$

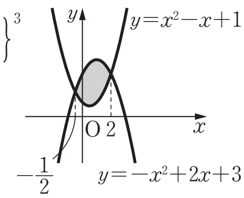
$$=-\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(2x^2-3x-2)\,dx$$

$$=-\int_{-\frac{1}{2}}^{2}(2x+1)(x-2)\,dx$$

$$=-2\int_{-\frac{1}{2}}^{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)\,dx$$

$$=-2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{2-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^3=\frac{125}{24}$$



類題 1　次の直線や曲線によって囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) 放物線 $y=x^2-3x+1$，直線 $y=-2x+3$　　(2) 放物線 $y=-2x^2+5x+8$，直線 $y=3x-4$

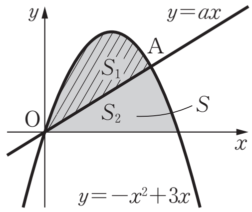
(3) 2つの放物線 $y=-x^2+5$，$y=x^2-4x-1$　　(4) 2つの放物線 $y=3x^2-7x-2$，$y=x^2-x-6$

例題 2 面積の分割

放物線 $y=-x^2+3x$ と x 軸で囲まれた図形の面積が，直線 $y=ax$ によって 2 等分されるとき，定数 a の値を求めよ。

アプローチ

右の図のように，放物線 $y=-x^2+3x$ と x 軸で囲まれた図形の面積を S，2 等分された図形の面積を S_1，S_2 とし，放物線と直線の交点のうち原点でないほうの点をAとする。



問題の条件は $S_1=S_2$ だが，$S=S_1+S_2$ を使うと，条件を $S=2S_1$ や $S=2S_2$ と表すこともできるので，どの式が一番計算しやすいかを考える。

S は放物線と x 軸で囲まれた図形の面積（**ポイント3**）なので

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \quad \cdots\cdots ⊛$$

を用いて面積を計算することができる。

S_1 は放物線と直線で囲まれた図形の面積（**例題 1**）なので，これも⊛を用いて定積分を簡単に計算することができる。

S_2 は 3 曲線（放物線 $y=-x^2+3x$，直線 $y=ax$，x 軸）で囲まれた図形の面積（**ポイント2**）なので，図形を分割して面積を求める必要があり，S や S_1 より計算が複雑である。

したがって，この問題では，S，S_1 を⊛を用いて計算し，方程式 $S=2S_1$ を解いて a の値を求めるのが簡単である。

（注） 実際に S_2 を定積分で求めるとき，一般の 3 次方程式を解くことになるため，かなり困難である。しかし，上記の方法であれば，S も $2S_1$ も⊛の右辺のような形で表せるため，3 乗根を考えることで，簡単に解を得られる。

解答

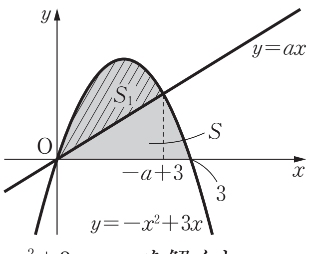
放物線 $y=-x^2+3x$ と x 軸で囲まれた図形の面積を S とする。

$-x^2+3x=0$ を解くと，$-x(x-3)=0$　　$x=0,\ 3$ より

$$S=\int_0^3(-x^2+3x)\,dx=-\int_0^3 x(x-3)\,dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(3-0)^3=\frac{1}{6}\cdot 3^3=\frac{9}{2}$$

放物線 $y=-x^2+3x$ と直線 $y=ax$ で囲まれた図形の面積を S_1 とすると，$S=2S_1$ となればよい。



ここで，$-x^2+3x=ax$ を解くと

$x^2+(a-3)x=0$　　$x\{x+(a-3)\}=0$

$x=0,\ -a+3$

交点の存在範囲より，$0<-a+3<3$

すなわち，$0<a<3$　……①

このとき

$$S_1=\int_0^{-a+3}\{(-x^2+3x)-ax\}\,dx$$

$$=-\int_0^{-a+3}x\{x-(-a+3)\}\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\{(-a+3)-0\}^3=-\frac{1}{6}(a-3)^3$$

したがって

$$\frac{9}{2}=2\left\{-\frac{1}{6}(a-3)^3\right\} \qquad (a-3)^3=-\frac{27}{2}$$

$$a-3=-\sqrt[3]{\frac{27}{2}}=-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}=-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}$$

$$=-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$

$$a=3-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}$$

これは①を満たす。

類題 2　放物線 $y=x^2-4x$ と x 軸で囲まれた図形の面積が，直線 $y=ax$ によって 2 等分されるとき，定数 a の値を求めよ。

演　習　問　題

パート 1 (p.20, 21)

1 放物線 $C : y=2x^2$ を y 軸方向に k だけ平行移動した放物線を C' とする。2 つの放物線 C，C' と 2 直線 $x=-1$，$x=2$ で囲まれた図形の面積が 6 のとき，定数 k の値を求めよ。　**⇒ポイント1**

2 次の直線や曲線で囲まれた図形の面積を求めよ。　**⇒ポイント2**

(1)　2 つの放物線 $y=x^2-2x+4$，$y=-x^2+4x$，2 直線 $x=0$，$x=3$

(2)　放物線 $y=-x^2+x+6$ の $x\leqq 2$ の部分，x 軸，直線 $x=2$

3 放物線 $y=x^2+3x+4$　……㊍について，次の問いに答えよ。　**⇒ポイント2**

(1)　原点から㊍に引いた接線の方程式を求めよ。

(2)　㊍および，(1)で求めた 2 本の接線で囲まれた図形の面積を求めよ。

4 放物線 $y=-x^2+4x+5$　……㊍について，次の問いに答えよ。　**⇒ポイント2**

(1)　点$(1,\ 8)$における㊍の接線の方程式を求めよ。

(2)　㊍および，(1)で求めた接線と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

5 定積分 $\displaystyle\int_0^5 |x^2-4x+3|\,dx$ を求めよ。　**⇒ポイント2**

6 次の放物線と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。　**⇒ポイント3**

(1)　放物線 $y=2x^2+4x-1$　　　(2)　放物線 $y=-3x^2+5x-1$

7 放物線 $y=-x^2-x+a$ と x 軸で囲まれる図形の面積が $\dfrac{9}{2}$ のとき，定数 a の値を求めよ。　**⇒ポイント3**

パート 2 (p.22, 23)

8 次の直線や曲線によって囲まれた図形の面積を求めよ。 ⇒**例題1**

(1) 放物線 $y=2x^2+3x-1$，直線 $y=3x+7$

(2) 放物線 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+3$，直線 $y=2x+1$

(3) 2つの放物線 $y=-x^2+2x+1$，$y=x^2+6x-1$

9 曲線 $y=|x^2-5x|$ と直線 $y=3x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。 ⇒**例題1**

10 次の問いに答えよ。 ⇒**例題2**

(1) 放物線 $y=x^2+4x$ と x 軸で囲まれた図形の面積が，直線 $y=ax$ によって2等分されるとき，定数 a の値を求めよ。

(2) 放物線 $y=-x^2+2x$ と x 軸で囲まれた図形の面積が，直線 $y=ax$ によって2等分されるとき，定数 a の値を求めよ。

11 2つの放物線 $C : y=x^2-2x$，$C' : y=-2x^2+4x$ について，次の問いに答えよ。 ⇒**例題2**

(1) 2つの放物線 C，C' で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

(2) (1)で求めた図形の面積 S が直線 $y=ax$ によって2等分されるとき，定数 a の値を求めよ。

パート 3

12 放物線 $y=-3x^2+6x$ と，x 軸，2直線 $x=a$，$x=a+1$ $(1<a<2)$ で囲まれた2つの部分の面積の和を $S(a)$ とする。

(1) $S(a)$ を求めよ。

(2) $S(a)$ の最小値を求めよ。

13 点$(1,\ 2)$を通る直線のうちで，放物線 $y=x^2$ と囲む図形の面積が最小である直線の式を求めよ。