はじめに

本テキストは，皆さんが無理なく基本をマスターし，かつ応用力を養成できるように編集してあります。

単元ごとに，知識の確認のための基本事項とそれを定着させるための例題があり，さらに問題を解く力を確実にするために，演習問題Ａと演習問題Ｂが段階を追って配列してあります。また，分からない問題がでてきたら，すぐに基本事項や例題に戻って，新出の用語・公式・法則などを確認し，その使い方を見ることができます。

数学は暗記だけでは対応できない科目です。本テキストの学習を通じ，基本事項の利用法と正解へのプロセスを体得し，実力を確かなものにされることを願っています。

構成と活用法

本テキストは，次のように構成されています。

▶基本事項　問題を解くにあたって必要とされる用語・公式・法則などがまとめてあります。

▶例　題　基本事項で得た知識を，実際に問題の中で使ってみることによって身につけます。

▶演習問題A　ここに集めてある問題は，演習問題Ｂに取り組む前にこれだけは押さえておきたいという，必要最低限のレベルです。解けた場合も，そうでない場合も，正解に至るまでの解法を必ず確認しましょう。

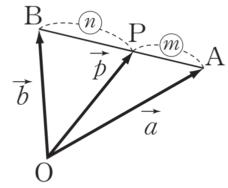
▶演習問題B　標準から発展レベルの問題を収録してあります。基本事項・例題で学んだ知識・解法をどのように応用していけばよいかを考えながら，問題に向かうと効果的です。

もくじ —— 数学B

第1講　平面ベクトル(1)

基本事項

1　分点の位置ベクトル



異なる2点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$に対して，線分ABを$m:n$の比に内分する点P$(\vec{p})$は

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

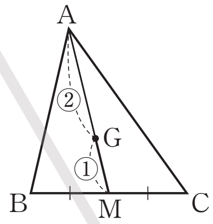
線分ABを$m:n$の比に外分する点Q$(\vec{q})$は

$$\vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

とくに，ABの中点M$(\vec{m})$は

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

2　重心の位置ベクトル



A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$を3頂点とする三角形ABCの重心G$(\vec{g})$は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

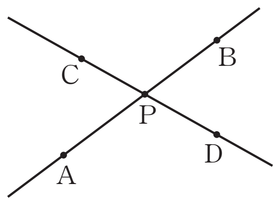
3　1次独立性の定理

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$のとき，実数$k$，$l$，$k'$，$l'$に対して

$$k\vec{a}+l\vec{b}=k'\vec{a}+l'\vec{b}\iff\begin{cases}k=k'\\ l=l'\end{cases}$$

が成り立つ。これを1次独立性の定理といい，$\vec{a}$と$\vec{b}$は互いに独立という。

4　2直線の交点の位置ベクトル



2直線AB，CDの交点P$(\vec{p})$の位置ベクトルを求めるには

(1)　PがAB上にあることを表す。(共線条件)

(2)　PがCD上にあることを表す。(共線条件)

(3)　(1)(2)の$\vec{p}$を，1次独立な2つのベクトルで2通りに表す。

(4)　(3)で得られた2つの式を比較して，$\vec{p}$を決定する。

5　成分による計算

$(a_1,\ a_2)\pm(b_1,\ b_2)=(a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2)$　(複号同順)

$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$　(kは実数)

6　成分表示されたベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$のとき，$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

7　ベクトルの平行条件

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$のとき，$\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{b}=k\vec{a}$　(ただし，kは0でない実数)

8　ベクトルの内積

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$　(θは$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角で，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$とする)

$\vec{a}=\vec{0}$または$\vec{b}=\vec{0}$のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

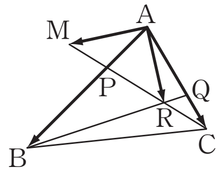
とくに，$\theta=0^\circ$のとき，$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

9　ベクトルの垂直条件

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$のとき

$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

例題 1



図のように三角形ABCの辺ABを1：2に内分する点をP，辺ACを2：1に内分する点をQとし，BQとCPの交点をRとする。

CR：RP$=s:(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{s}{\boxed{\quad}}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

また，BR：RQ$=t:(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{\quad}\,t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

したがって，s，t を消去して $\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\boxed{\quad}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\boxed{\quad}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である。また，RPを $1:r\ (0<r<1)$ に外分する点をMとするとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{1-r}\{(\boxed{\quad}-\boxed{\quad}\,r)\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\boxed{\quad}\,r\overrightarrow{\mathrm{AC}}\}$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が平行になるのは $r=\boxed{\quad}$ のときである。

次に，AB$=3$，AC$=4$，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となるのは $r=\boxed{\quad}$ のときである。

解答

AP：PB$=1:2$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

CR：RP$=s:(1-s)$ とおくと，内分点の公式より

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=s\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$=\frac{s}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad\cdots\cdots①$$

⟵$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表す

AQ：QC$=2:1$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

BR：RQ$=t:(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

$$=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\quad\cdots\cdots②$$

⟵$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表す

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\nparallel\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　⟵$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は1次独立

①と②の係数を比べて

$$\frac{s}{3}=1-t,\quad 1-s=\frac{2}{3}t$$

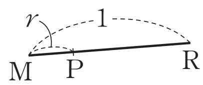
これを解いて

$$s=\frac{3}{7},\quad t=\frac{6}{7}$$

①に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

また，MはRPを $1:r$ に外分するから



MR：RP$=r:(1-r)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-r)\overrightarrow{\mathrm{AM}}+r\overrightarrow{\mathrm{AR}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{1-r}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-r\overrightarrow{\mathrm{AR}})$$ ←—外分点の公式より直接求めてもよい

$$=\frac{1}{1-r}\left\{\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-r\left(\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{1-r}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}r\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{4}{7}r\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}$$

これが$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$と平行であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}=k(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})\quad (k\text{は実数})$$ ←—ベクトルの平行条件

と表される。係数を比較して

$$-k=\frac{1}{1-r}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}r\right),\ k=-\frac{1}{1-r}\cdot\frac{4}{7}r$$ ←—$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$は1次独立

kを消去して

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{7}r=\frac{4}{7}r\quad \text{ゆえに，}\ r=\frac{7}{15}$$

次に，$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{AC}=4$，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=3\cdot4\cos60^\circ=6,\ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=16$$

$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より ←—ベクトルの垂直条件

$$\frac{1}{1-r}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}r\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{4}{7}r\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}r\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\frac{4}{7}r|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=0$$

$$6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}r\right)-\frac{64}{7}r=0$$

$$r=\frac{1}{5}$$

(別解)

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$を求めるところは次のようにしてもよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{s}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$ ←—$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき，点Pが直線AB上にあるならば $x+y=1$

$$=\frac{s}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{2}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

Rは直線BQ上の点であるから

$$\frac{s}{3}+\frac{3}{2}(1-s)=1\quad \text{ゆえに，}\ s=\frac{3}{7}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

演習問題 A

1 $\vec{a}=(2,\ -\sqrt{5})$，$\vec{b}=(x,\ 3)$ のとき，$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行になるような x の値を求めよ。

2 $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 1)$ のとき，ベクトル $\vec{p}$ を $\vec{p}=k\vec{a}+(2-k)\vec{b}$ とする。$2 \leqq k \leqq 4$ に対する $\vec{p}$ の大きさ $|\vec{p}|$ の最大値を求めよ。

3 △ABCの辺ABを3：1に内分する点をP，辺BCを2：1に外分する点をQとするとき，次のベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

4 位置ベクトル $\vec{a}=(x^2,\ y)$，$\vec{b}=(-x,\ 2)$，$\vec{c}=(0,\ 1)$ である3点を頂点とする三角形の重心の位置ベクトルが $(2,\ 2)$ のとき，x，y の値を求めよ。

5　三角形ABCにおいて，次の等式を満たす点Pはどのような位置にあるか。

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

6　平面上に平行でない2つのベクトル $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ がある。点C，Dを $\overrightarrow{OC}=2\vec{a}$，$\overrightarrow{OD}=3\vec{b}$ となるようにとる。AD，BCの交点をEとするとき，ベクトル $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

7　平行四辺形OABCにおいて，DをOAを2：1に内分する点，EをOCの中点，FをCDとBEの交点とする。CF＝mCD，BF＝nBE とするとき，$\dfrac{n}{m}$の値を求めよ。

8　四角形ABCDにおいて，$\overrightarrow{BC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ が成り立っているとき，

$\overrightarrow{AC}=\boxed{\text{ア}}\overrightarrow{AB}+\boxed{\text{イ}}\overrightarrow{AD}$ であり，対角線ACとBDの交点をEとすると，
$\overrightarrow{AE}=\boxed{\text{ウ}}\overrightarrow{AB}+\boxed{\text{エ}}\overrightarrow{AD}$ である。

また，AB＝$\dfrac{3}{2}$，AD＝1，∠BAD＝60° のとき，AE＝$\boxed{\text{オ}}$ である。

演習問題B

1 ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(4,\ 3)$と$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(5,\ 12)$とのなす角を2等分する方向をもち，長さは5であるようなベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を求めよ。

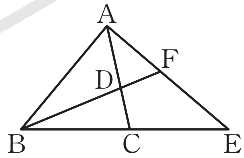
2 $0<m<1$とする。三角形ABCの辺AB，ACの中点をそれぞれD，Eとし，DB，EAをそれぞれ$m:(1-m)$に内分する点をF，Gとする。さらにBGとCDの交点をH，BEとCFの交点をIとし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$，$m$で表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$，$m$で表せ。

(3) 3点A，H，Iは同一直線上にあることを示せ。

3 同一直線上にない3点A，B，Cがある。図のように線分ACを3：2に内分する点をD，線分BCを$a:1$ $(a>1$とする$)$に外分する点をEとし，直線BDと直線AEの交点をFとする。次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=s\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$とおくとき，$s$，$t$を$a$を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CF}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$となるような$a$の値を求めよ。

(3) △ABCが正三角形のとき，$\overrightarrow{\mathrm{CF}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AE}}$となる$a$の値を求めよ。

4 Pを三角形ABCの内部の点とし，三角形BPC，三角形CPA，三角形APBの面積の比が1：2：3になるものとする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$で表せ。

(2) $a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$とするとき，$a:b:c$を求めよ。ただし，$abc\neq0$とする。