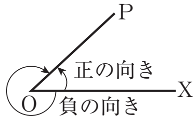
第1講　三角関数の定義と基本性質

ポイント〈1〉一般角と弧度法

一般角

平面上で，点Oを中心として半直線OPを回転させるとき，半直線OPを動径，最初の位置を示す半直線OXを始線という。



動径の回転について，反時計回りを正の向き，時計回りを負の向きという。

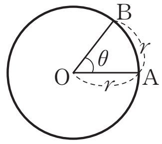
このように動径の回転する向きと大きさを考えた角を一般角という。

一般に，動径OPと始線OXとのなす角の１つを α とすると，動径OPの表す一般角 θ は

$\theta=\alpha+360^\circ\times n$　（n は整数）と表される。

弧度法

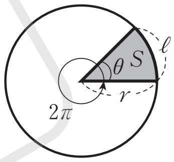
半径 r の円において，弧ABの長さが半径 r に等しいとき，弧ABに対する中心角 θ を１ラジアン(1 弧度)といい，これを単位として，角の大きさを表す方法を弧度法という。半径１の半円の弧の長さは π であるから，次の関係が成り立つ。



$$\pi\text{ラジアン}=180^\circ,\quad 1\text{ラジアン}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ,\quad \frac{\pi}{180}\text{ラジアン}=1^\circ$$

本誌では，角の大きさを表すのに，おもに弧度法を用いる。普通，弧度法での単位「ラジアン」は表記せず省略する。

半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さ ℓ，面積 S は次のように表される。



$$\ell=r\theta,\quad S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r\ell$$

チェック1　次の問いに答えよ。

(1)　次の角は第何象限の角か。

(i)　250°　　(ii)　510°　　(iii)　−315°　　(iv)　−420°

(2)　次の表の(i)〜(iv)に当てはまる値を求めよ。

度数法	30°	(ii)	120°	(iv)
弧度法	(i)	$\frac{2}{5}\pi$	(iii)	$\frac{11}{12}\pi$

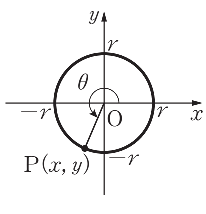
(3)　半径 3，中心角240°の扇形の弧の長さ ℓ と，面積 S を求めよ。

ポイント〈2〉三角関数の定義

右の図のように，x 軸の正の部分を始線とし，角 θ の動径と，原点を中心とする半径 r の円との交点Pの座標を $(x,\ y)$ とするとき

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\quad \cos\theta=\frac{x}{r},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

と定め，それぞれを一般角 θ の正弦，余弦，正接という。



三角関数の値の符号

象限	1	2	3	4
$\sin\theta$	＋	＋	−	−
$\cos\theta$	＋	−	−	＋
$\tan\theta$	＋	−	＋	−

これらをまとめて θ の三角関数という。

三角関数の値の符号は右の表のようになり，とり得る値の範囲は以下のようになる。

$-1\leqq\sin\theta\leqq1$，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$，$\tan\theta$ はすべての実数

チェック2　次の三角関数の値を求めよ。

(1)　$\sin\frac{2}{3}\pi$　　(2)　$\cos\pi$　　(3)　$\tan\frac{5}{4}\pi$

(4)　$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$　　(5)　$\cos\frac{7}{6}\pi$　　(6)　$\tan\left(-\frac{7}{6}\pi\right)$

Sample

ポイント 3 三角関数の相互関係と性質

三角関数の相互関係

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \qquad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

三角関数の性質

(ア) $\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$　$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$　$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$ (n は整数)

(イ) $\sin(-\theta)=-\sin\theta$　$\cos(-\theta)=\cos\theta$　$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

(ウ) $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$　$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$　$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$

(エ) $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$　$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$　$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$

(オ) $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$　$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$　$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

(カ) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$　$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$　$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$

チェック3　次の問いに答えよ。

(1)(i)　θ が第 2 象限の角で，$\sin\theta=\frac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(ii)　θ が第 3 象限の角で，$\cos\theta=-\frac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　次の三角関数を 0 から $\frac{\pi}{4}$ までの角の三角関数で表し，その値を求めよ。

(i)　$\sin\frac{5}{4}\pi$　　(ii)　$\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$　　(iii)　$\tan\frac{25}{6}\pi$

ポイント 4 三角関数のグラフ

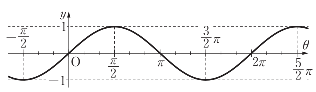
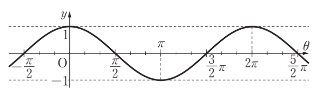
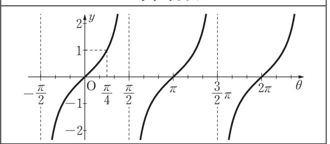
周期関数

関数 $f(x)$ において，0 でない定数 c に対して，$f(x+c)=f(x)$ がつねに成り立つとき，$f(x)$ は c を周期とする周期関数であるという。一般に，周期は正の値で最小のもの(基本周期)を考える。

偶関数・奇関数

関数 $f(x)$ において，$f(-x)=f(x)$ がつねに成り立つとき $f(x)$ は偶関数，$f(-x)=-f(x)$ がつねに成り立つとき $f(x)$ は奇関数であるという。

三角関数のグラフ

	$y=\sin\theta$	$y=\cos\theta$	$y=\tan\theta$
周期	2π	2π	π
定義域	実数全体	実数全体	$\theta\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$ (nは整数)
値域	$-1\leqq y\leqq 1$	$-1\leqq y\leqq 1$	実数全体
偶・奇関数	奇関数	偶関数	奇関数
グラフ			

$y=\sin\theta$ や $y=\cos\theta$ のグラフの形の曲線を正弦曲線という。

$y=\tan\theta$ のグラフの漸近線は，直線 $\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$ (n は整数) である。

チェック4　次の(ア)〜(オ)の中で，関数が偶関数，奇関数であるものをそれぞれすべて答えよ。

(ア)　$y=\sin(-x)$　　(イ)　$y=-\cos x$　　(ウ)　$y=5\tan x$　　(エ)　$y=x^3+1$　　(オ)　$y=|x|$

Sample

例題 1 三角関数の対称式の値

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$　　(3) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

アプローチ

$\sin\theta$，$\cos\theta$ についての対称式は，基本対称式 $\sin\theta+\cos\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ だけで表すことができる。
また，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の基本対称式 $\sin\theta+\cos\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ の一方を t とおくと，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いて式変形することで，もう一方を次のように表すことができる。

(ア) $\sin\theta+\cos\theta=t$ のとき，$\sin\theta\cos\theta=\frac{t^2-1}{2}$

(イ) $\sin\theta\cos\theta=t$ のとき，$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2t$

よって，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の基本対称式の場合，一方の値がわかれば，もう一方の値を求めることができる。
$\sin\theta$，$\cos\theta$ についての対称式の値を求めるには，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の基本対称式の値を求めてから，与えられた式を変形して，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の基本対称式で表して考える。

(1) 与えられた等式の両辺を平方することで，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用できる。

(2) $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いて式変形を行うことで，$\sin\theta\cos\theta$ だけの式にできる。

(3) 3次式の因数分解の公式および $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いることで，$\sin\theta+\cos\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ だけの式にできる。

解答

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$ の両辺を平方して

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{3}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}\qquad 2\sin\theta\cos\theta=-\frac{2}{3}$$

よって，$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{3}$

(2) $$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{3}$ より

$$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=1\div\left(-\frac{1}{3}\right)=-3$$

(3) $$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{3}$ より

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

(別解)

$\sin\theta$ と $\cos\theta$ についての対称式であるから

$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$

と変形して，値を代入してもよい。

類題 1 次の問いに答えよ。

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{3}{5}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i) $\sin\theta\cos\theta$　　(ii) $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}$　　(iii) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

(2) θ は第1象限の角で，$\sin\theta\cos\theta=\frac{60}{169}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i) $\sin\theta+\cos\theta$　　(ii) $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$　　(iii) $\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

Sample

例 題 2 三角関数のグラフの移動・変形

次の関数のグラフをかき，周期を求めよ。

(1) $y=-\sin 2\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2) $y=\tan\dfrac{1}{2}\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

アプローチ

三角関数は，式からグラフの変形の様子を読みとることができる。三角関数のグラフの移動，拡大・縮小は，次の(i)のようにまとめることができる。これらの考え方を使って，複雑な三角関数もグラフにかき表すことができる。グラフをかくときは，(ii)でまとめる内容にも注意する。

(i) 以下の①～⑤の関数のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを次のように移動，拡大・縮小したものである。

① $y=-\sin\theta$ ： θ 軸に関して対称移動
② $y=\sin\theta+a$ ： y 軸方向に a だけ平行移動
③ $y=\sin(\theta-\alpha)$ ： θ 軸方向に α だけ平行移動
④ $y=a\sin\theta$ ： θ 軸を基準にして y 軸方向に a 倍に拡大・縮小
⑤ $y=\sin k\theta\ (k\neq 0)$ ： y 軸を基準にして θ 軸方向に $\dfrac{1}{k}$ 倍に拡大・縮小$\left(\text{周期：}\dfrac{2\pi}{k}\right)$

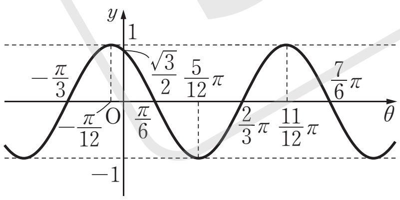
(ii) グラフをかくときの注意点

θ 軸，y 軸との交点あるいは通る点の座標，y のとり得る最大値，最小値があればその値，およびそのときの θ の値を記入し，少なくとも 2 周期分はかくようにする。

解答

(1) $y=-\sin 2\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$ は，$y=-\sin 2\theta$ の θ を $\theta-\dfrac{\pi}{6}$ におき換えた式である。

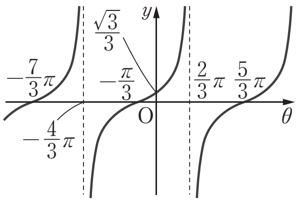
したがって，このグラフは $y=\sin 2\theta$ のグラフを θ 軸に関して対称移動し，θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものであり，下の図のようになる。



よって，周期は π

(2) $y=\tan\dfrac{1}{2}\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ は，$y=\tan\dfrac{\theta}{2}$ の θ を $\theta+\dfrac{\pi}{3}$ におき換えた式である。

したがって，このグラフは，$y=\tan\dfrac{\theta}{2}$ のグラフを θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものであり，下の図のようになる。



よって，周期は 2π

(別解)

$y=\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ の θ を $\dfrac{\theta}{2}$ でおき換えた式であるから，このグラフは，$y=\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフを y 軸を基準にして θ 軸方向に 2 倍に拡大したものである。

類題 2 次の関数のグラフをかき，周期を求めよ。

(1) $y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{2}$　　(2) $y=-2\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$

Sample

演　習　問　題

パート 1 (p.2, 3)

1 次の角のうち，その動径が110°の動径と一致するものをすべて求めよ。　**⇒ポイント1**

290°，470°，−110°，200°，−250°，830°

2 次の角を，度数法は弧度法に，弧度法は度数法に書き直して表せ。　**⇒ポイント1**

(1)　270°　　(2)　−15°　　(3)　$\dfrac{9}{20}\pi$　　(4)　$-\dfrac{3}{4}\pi$

3 扇形の弧の長さ ℓ が $\dfrac{5}{3}\pi$，面積 S が $\dfrac{25}{6}\pi$ のとき，半径と中心角を求めよ。　**⇒ポイント1**

4 $\sin\theta>0$，$\tan\theta<0$ のとき，角 θ は第何象限の角か。　**⇒ポイント2**

5 $\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。　**⇒ポイント3**

6 次の等式を証明せよ。　**⇒ポイント3**

(1)　$(1-\tan^2\theta)\cos^2\theta=1-2\sin^2\theta$　　(2)　$\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\dfrac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$

7 $\tan\theta=3$ のとき，次の式の値を求めよ。　**⇒ポイント3**

(1)　$\sin^2\theta$　　(2)　$\dfrac{1}{1-\cos\theta}+\dfrac{1}{1+\cos\theta}$

8 次の値を，0°から45°までの角の三角関数で表せ。　**⇒ポイント3**

(1)　$-\sin(-12^\circ)$　　(2)　$\cos 200^\circ$　　(3)　$\tan 130^\circ$

9 次の式の値を求めよ。　**⇒ポイント3**

(1)　$\sin\theta+\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\theta+\pi)+\sin\left(\theta+\dfrac{3}{2}\pi\right)$

(2)　$\tan\theta\tan(\theta+\pi)+\dfrac{1}{\cos(-\theta)\cos(\pi-\theta)}$

(3)　$\sin(-\theta)\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos(-\theta)\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$

Sample

パート 2（p.4，5）

10 θ は第 3 象限の角で，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$ のとき，次の式の値を求めよ。　⇒**例題 1**

（1）$\sin\theta+\cos\theta$　　（2）$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$　　（3）$\dfrac{\sin\theta+1}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta+1}{\sin\theta}$

11 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ のとき，次の式の値を求めよ。　⇒**例題 1**

（1）$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$　　（2）$\tan^3\theta+\dfrac{1}{\tan^3\theta}$

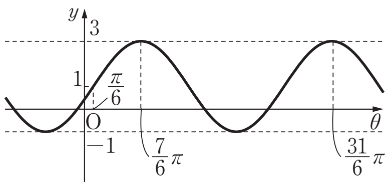
12 次の関数のグラフをかき，周期を求めよ。　⇒**例題 2**

（1）$y=\sin3\left(\theta-\dfrac{\pi}{5}\right)$　　（2）$y=\tan\dfrac{1}{3}\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

13 次の関数のグラフをかき，周期を求めよ。　⇒**例題 2**

（1）$y=2\sin\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　（2）$y=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)-1$

14 関数 $y=a\sin(k\theta-\alpha)+b$
（a，b，k，α は定数，$a>0$，$k>0$，$0\leqq\alpha<\pi$）のグラフが右の図のようになるとき，a，b，k，α の値を求めよ。　⇒**例題 2**



パート 3

15 θ は第 2 象限の角で，$\cos\theta=-\dfrac{3}{4}$ であるとする。このとき，3θ は第何象限の角か。

16 x の 2 次方程式 $x^2-2(\cos\theta)x-\sin^2\theta=0$ の 2 つの解のうち，一方の解が他方の解の -3 倍であるとき，θ の値を求めよ。ただし，$\pi\leqq\theta\leqq2\pi$ とする。

Sample