はじめに

本テキストは，皆さんが無理なく基本をマスターし，かつ応用力を養成できるように編集してあります。

単元ごとに，知識の確認のための基本事項とそれを定着させるための例題があり，さらに問題を解く力を確実にするために，演習問題Ａと演習問題Ｂが段階を追って配列してあります。また，分からない問題がでてきたら，すぐに基本事項や例題に戻って，新出の用語・公式・法則などを確認し，その使い方を見ることができます。

数学は暗記だけでは対応できない科目です。本テキストの学習を通じ，基本事項の利用法と正解へのプロセスを体得し，実力を確かなものにされることを願っています。

構成と活用法

本テキストは，次のように構成されています。

▶基本事項　問題を解くにあたって必要とされる用語・公式・法則などがまとめてあります。

▶例　題　基本事項で得た知識を，実際に問題の中で使ってみることによって身につけます。

▶演習問題A　ここに集めてある問題は，演習問題Ｂに取り組む前にこれだけは押さえておきたいという，必要最低限のレベルです。解けた場合も，そうでない場合も，正解に至るまでの解法を必ず確認しましょう。

▶演習問題B　標準から発展レベルの問題を収録してあります。基本事項・例題で学んだ知識・解法をどのように応用していけばよいかを考えながら，問題に向かうと効果的です。

もくじ —— 数学Ⅱ

第1講 微分法(1)

基本事項

1 関数の極限値

関数$f(x)$において，xの値が定数αに限りなく近づくときに，$f(x)$の値が一定の値βに限りなく近づくならば，βを$x \longrightarrow \alpha$のときの$f(x)$の極限値といい，$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$と表す。

2 平均変化率と微分係数

関数$f(x)$の$x=a$から$x=b$までの平均変化率は，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

関数$f(x)$の$x=a$から$x=a+h$までの平均変化率の，$h \longrightarrow 0$のときの極限値を，関数$f(x)$の$x=a$における微分係数といい，$f'(a)$と表す。

$f'(a)$は，曲線$y=f(x)$の$x=a$における接線の傾きを表している。

3 導関数

関数$f(x)$において，微分係数$f'(a)$のaを変数xに置きかえて得られるxの関数を$f(x)$の導関数といい，$f'(x)$と表す。

$y=f(x)$の導関数の表し方は，y'，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$などもある。

$f(x)$から$f'(x)$を求めることを，$f(x)$を微分するという。

4 微分法の公式

$n=1, 2, 3, \cdots$のとき，$(x^n)'=nx^{n-1}$　(ただし，$x^0=1$)

cが定数のとき，$(c)'=0$

$\{f(x) \pm g(x)\}'=f'(x) \pm g'(x)$　(複号同順)

$\{kf(x)\}'=kf'(x)$　(kは定数)

例題 1

次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+6x+5}{x^2-1}$$

解答

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+6x+5}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x+5)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x+5}{x-1}$$

$$= \frac{-1+5}{-1-1}$$

$$= -2$$

$\longleftarrow x \longrightarrow -1$のとき，分母$\longrightarrow 0$であるから極限値をもつとき，分子$\longrightarrow 0$である。よって，分子は$x+1$を因数にもつ。

例題 2

2次関数 $f(x)=3x^2-5x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　x が 2 から 3 まで変化するときの平均変化率を求めよ。

(2)　x が 2 から $2+h$ まで変化するときの平均変化率を求めよ。
ただし，$h \neq 0$ とする。

(3)　導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(4)　$x=2$ における微分係数を求めよ。

解答

(1)　x が 2 から 3 まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2}$$

$$f(3)=3\cdot3^2-5\cdot3=12,\ f(2)=3\cdot2^2-5\cdot2=2$$

であるから

$$(\text{平均変化率})=12-2=10$$

(2)　(1)と同様にして，

$$\begin{aligned}f(2+h)&=3(2+h)^2-5(2+h)\\&=3(h^2+4h+4)-10-5h\\&=3h^2+7h+2\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2}&=\frac{3h^2+7h}{h}\\&=3h+7\end{aligned}$$

(3)　
$$\begin{aligned}f'(x)&=(3x^2-5x)'\\&=3(x^2)'-5(x)'\\&=6x-5\end{aligned}$$

(4)　(3)に $x=2$ を代入して

$$f'(2)=6\cdot2-5=7$$

(別解)

(2)で $h \longrightarrow 0$ として

$$f'(2)=\lim_{h\to0}(3h+7)=7$$

《注》 (3)は導関数の公式

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

を用いた。

定義より $f'(x)$ を求めると

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{3(x+h)^2-5(x+h)-(3x^2-5x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{6hx+3h^2-5h}{h}\\&=\lim_{h\to0}(6x+3h-5)\\&=6x-5\end{aligned}$$

例題 3

次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=2x^3-ax^2+x+6$ について

$$f'(1)=1$$

となるような定数 a の値を求めよ。

(2)　2 次関数 $f(x)$ について

$$f'(0)=2,\ f'(1)=3,\ f'(f(0))=5$$

が成り立つとき，$f(x)$ を求めよ。

解答

(1)　$f'(x)=(2x^3-ax^2+x+6)'$

$=2(x^3)'-a(x^2)'+(x)'+(6)'$

$=6x^2-2ax+1$

$f'(1)=6-2a+1=7-2a$

$f'(1)=1$ より

$7-2a=1 \qquad 2a=6$

ゆえに，$a=3$

(2)　$f(x)$ は 2 次関数であるから

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

とおける。

このとき

$f'(x)=(ax^2+bx+c)'$

$=a(x^2)'+b(x)'+(c)'$

$=2ax+b$

よって，$f'(0)=2$，$f'(1)=3$ より

$2a\cdot 0+b=2$

$2a\cdot 1+b=3$

これを解いて

$$b=2,\ a=\frac{1}{2}$$

また，$f(0)=c$ より

$f'(c)=5$

$2ac+b=5$

$a=\dfrac{1}{2}$，$b=2$ を代入して

$c+2=5$

$c=3$

したがって，求める 2 次関数は

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+3$$

演　習　問　題　A

1　次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}\right)$

2　次の等式が成り立つような定数 a, b の値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}=3$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+5}{x-1}=b$

3　関数 $f(x)=x^3-2x+1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の $x=1$ から $x=2$ までの平均変化率を求めよ。

(2)　$f(x)$ の $x=1$ から $x=1+h$ までの平均変化率を求めよ。

(3)　(2)を利用して，$f'(1)$ の値を求めよ。

4　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=(x-1)^3$

(2)　$y=x^2+(x-1)^2+(x+1)^2$

(3)　$y=(2x-1)(x+1)^2$

5 関数 $f(x)=x^3+ax^2+b$ において

$$f'(-3)=0,\ f(-3)=-3$$

となるとき，$f(x)$ を求めよ。

6 定義に基づいて次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x)=x^2$

(2) $f(x)=1$

7 $f(x)$ は 2 次関数とする。$f(x)$ が

$$3f(x)=xf'(x)-2x^2-6x-1$$

を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

演習問題 B

1 $\lim_{x \to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$ と $\lim_{x \to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=1$ を同時に満たす 3 次関数 $f(x)$ を求めよ。

2 関数 $f(x)$ の $x=3$ における微分係数が 2 のとき

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(3-2h)-f(3+3h)}{h}$$

を求めよ。

3 p，q，r を実数とする $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ が次の条件を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

(i) $f(x)$ は $f'(x)$ で割り切れる。

(ii) $f(0)=1$

4 実数 a は $a>-1$ とする。関数 $f(x)=3x^3-7x^2+5x-1$ に対し

$$-1<c<a,\ \frac{f(a)-f(-1)}{a+1}=f'(c)$$

となる c がちょうど 2 つ存在するような a の値の範囲を求めよ。