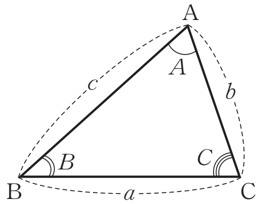
# 第2講　正弦定理・余弦定理

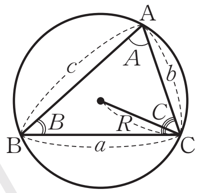
第２講・第３講では，△ABC について
　∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ，$A$，$B$，$C$
　辺BC，辺CA，辺AB の長さをそれぞれ，$a$，$b$，$c$
と断りなく表すことがある。




## ポイント① 正弦定理

△ABC の外接円の半径を $R$ とするとき，次の関係式が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



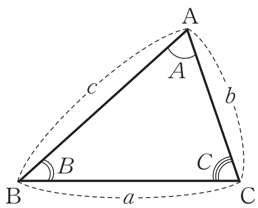

これを正弦定理という。
　正弦定理は，次のときに用いる。
(1)　三角形の２組の向かい合う辺と角の組について考えるとき
(2)　三角形の１組の向かい合う辺と角の組および外接円の半径について考えるとき

**チェック１**　△ABC の外接円の半径を $R$ とするとき，次の問いに答えよ。
(1)　$a=8$，$A=45^\circ$，$B=60^\circ$ のとき，$b$ を求めよ。
(2)　$c=6$，$C=120^\circ$のとき，$R$ を求めよ。
(3)　$a=14$，$R=7\sqrt{2}$ のとき，$A$ を求めよ。

## ポイント② 余弦定理

△ABC において，次の関係式が成り立つ。

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$$




これを余弦定理という。
　余弦定理は，三角形の２辺と１つの角が与えられ，残りの１辺を求めるときに用いる。
　また，上の余弦定理をそれぞれ変形すると

$$\begin{cases} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$$

となる。
　この形の余弦定理は，三角形の３辺が与えられ，１つの角の三角比の値を求めるときに用いる。

**チェック２**　△ABC について，次の問いに答えよ。
(1)　$a=1$，$b=4\sqrt{2}$，$C=45^\circ$ のとき，$c$ を求めよ。
(2)　$b=2$，$c=6$，$A=120^\circ$ のとき，$a$ を求めよ。
(3)　$a=2$，$b=4$，$c=5$ のとき，$\cos A$ を求めよ。
(4)　$a=6$，$b=\sqrt{31}$，$c=5$ のとき，$B$ を求めよ。

## ◆ポイント〈3〉三角形の決定

三角形の6つの辺と角のうち，以下の(1)～(4)のような3つの辺や角が与えられると，残りの辺や角を求めることができる。

(1)　3辺(P10　**例題1・類題1**)

(i)　余弦定理によって，1つの角を求める。

(ii)　わかっている辺や角を用いて，正弦定理または余弦定理によってもう1つの角を求める。

(iii)　残りの1つの角は，三角形の内角の和によって求める。

(2)　2辺とその間の角(P13　**演習問題❾**)

(i)　余弦定理によって，残りの1辺を求める。

(ii)　その辺を用いて，正弦定理または余弦定理によって1つの角を求める。

(iii)　残りの1つの角は，三角形の内角の和によって求める。

(3)　2辺とその間でない1つの角(P11　**例題2・類題2**)

(i)　残りの1辺について，余弦定理で2次方程式をつくって求める。

(ii)　わかっている辺や角を用いて，正弦定理または余弦定理によって1つの角を求める。

(iii)　三角形の内角の和によって，残りの1つの角を求める。

(注)　求める辺と角は，2通りとなることもある。

(4)　1辺とその両端の角(**チェック3**)

(i)　三角形の内角の和によって，残りの1つの角を求める。

(ii)　わかっている辺や角を用いて，正弦定理または余弦定理によって残りの2辺を求める。

(1)～(4)の(ii)において，正弦定理と余弦定理のどちらを使うかは，角の大きさが，三角比の値を求められるものかどうかで判断する。

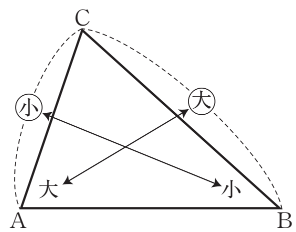
**チェック3**　次の各場合について，△ABCの残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1)　$a=2\sqrt{3}$，$B=30°$，$C=60°$　　(2)　$c=4$，$A=30°$，$B=120°$

## ◆ポイント〈4〉鋭角，直角，鈍角の条件

**三角形の辺と角の大小関係**

三角形の2辺の大小関係と，その対角の大小関係は一致する。例えば，右の図で $a>b \iff A>B$ である。




**鋭角三角形・直角三角形・鈍角三角形の判定**

余弦定理 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ より，$\cos A$ の符号と $b^2+c^2-a^2$ の符号は一致する。すなわち

$A<90° \iff \cos A>0 \iff b^2+c^2>a^2$

$A=90° \iff \cos A=0 \iff b^2+c^2=a^2$　(三平方の定理)

$A>90° \iff \cos A<0 \iff b^2+c^2<a^2$

が成り立つ。

このことを用いて，三角形の3辺の長さから鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるかを判定することができる。いずれの三角形であるかは，最大角が鋭角，直角，鈍角のいずれであるかによって決まる。

**チェック4**　△ABCの3辺の長さが次のとき，△ABCは鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるか。

(1)　$a=5$，$b=7$，$c=8$　　(2)　$a=7$，$b=9$，$c=4$

(3)　$a=3$，$b=7$，$c=2\sqrt{10}$　　(4)　$a=5$，$b=2\sqrt{2}$，$c=3\sqrt{2}$

## 例題 1　三角形の決定（3辺がわかっているとき）

$a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}+1$ のとき，△ABCの3つの角の大きさを求めよ。

**アプローチ**

**ポイント3**(1)で示した，三角形の3辺が与えられたときの3つの角を求める手順に沿って求める。

(i)　余弦定理 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ によって，$A$ を求める。

(ii)　$a$，$b$，$A$ を用いて，正弦定理によって $B$ を求める。
このとき，$B$ が2通り求められるが，それぞれの角の大きさが問題に適しているか確認する。
また，余弦定理 $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ によって $B$ を求めてもよい。

(iii)　$C$ を三角形の内角の和によって求める。

$C$ について，余弦定理 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ を用いると

$$\cos C=\frac{2^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3}+1)^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}=\frac{4+2-3-2\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}=\frac{2-2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

となり，三角比の値から $C$ を求めることができない。このような角は内角の和を用いて最後に求める。
$c$ のように根号で表された数と有理数の和や差で表された辺が1つだけあるとき，その対角が求められないことが多いので，その他の角から求めるとよい。

**解答**

余弦定理より

$$\cos A=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{2+3+2\sqrt{3}+1-4}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$A=45°$

正弦定理より

$$\frac{2}{\sin 45°}=\frac{\sqrt{2}}{\sin B}$$
$$\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{\sin B}$$
$$\sin B=\frac{1}{2}$$

よって，$B=30°$，$150°$

ここで，$A+B<180°$ より

$B=30°$ は適する

$B=150°$ は不適

よって，$B=30°$

$A=45°$，$B=30°$ より

$C=180°-(45°+30°)=105°$

**(別解)**

$B$ は次のように求めることもできる。

余弦定理より

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+2^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot 2}$$
$$=\frac{3+2\sqrt{3}+1+4-2}{4(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{6+2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4(\sqrt{3}+1)}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$B=30°$

**類題 1**　次の各場合について，△ABCの3つの角の大きさを求めよ。

(1)　$a=3\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{3}$，$c=\sqrt{3}+3$

(2)　$a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{3}-1$，$c=2$

## 例題 2　三角形の決定（2辺とその間でない1つの角がわかっているとき）

$a=2\sqrt{3}$，$b=2\sqrt{2}$，$B=45°$ のとき，△ABCの残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

### アプローチ

**ポイント3**(3)で示した，三角形の2つの辺とその間でない1つの角が与えられたときの，残りの辺や角を求める手順に沿って求める。

(i)　余弦定理 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ によって，$c$ についての2次方程式をつくって $c$ を求める。
$c>0$ より $c$ が1通りになる場合もあるが，本問では $c$ は2通り考えられる。

(ii)　それぞれの $c$ の値について，余弦定理 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ によって，$A$ を求める。

また，正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ によって $A$ を求めてもよい。（**類題2**(2)の解説参照）

(iii)　$C$ を三角形の内角の和によって求める。

(i)で，$c$ を求めるとき，余弦定理は，与えられている角 $B$ が含まれている式を用いる。

○　与えられている角 $B$ を含む余弦定理 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ を用いる
→$a$，$b$，$B$ がわかっているので，$c$ を求めることができる。

×　求める辺 $c$ の平方が左辺にある余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ を用いる
→$a$，$b$ がわかっているが $C$ がわからないので，$c$ を求めることができない。

### 解答

余弦定理より

$(2\sqrt{2})^2=c^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot c\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos 45°$

$8=c^2+12-2\sqrt{6}\,c$

$c^2-2\sqrt{6}\,c+4=0$

$c=-(-\sqrt{6})\pm\sqrt{(-\sqrt{6})^2-1\cdot 4}$

$=\sqrt{6}\pm\sqrt{2}$

$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ のとき

余弦定理より

$$\cos A=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{8+6+4\sqrt{3}+2-12}{4\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}+4}{4\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{4(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

よって，$A=60°$

$A=60°$，$B=45°$ より

$C=180°-(60°+45°)=75°$

$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$ のとき

余弦定理より

$$\cos A=\frac{(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{8+6-4\sqrt{3}+2-12}{4\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{-4\sqrt{3}+4}{4\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{-4(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

よって，$A=120°$

$A=120°$，$B=45°$ より

$C=180°-(120°+45°)=15°$

以上より

$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$A=60°$，$C=75°$

$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，$A=120°$，$C=15°$

**類題2**　次の各場合について，△ABCの残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1)　$a=2$，$b=2\sqrt{2}$，$B=135°$　　(2)　$a=6$，$c=6\sqrt{2}$，$A=30°$

# 演　習　問　題

## パート 1 (p.8，9)

**1** △ABCの外接円の半径を$R$とするとき，次の問いに答えよ。　**⇒ポイント1**

(1)　$c=8\sqrt{3}$，$A=120°$，$C=45°$ のとき，$a$ を求めよ。

(2)　$b=9\sqrt{2}$，$c=6\sqrt{3}$，$B=60°$ のとき，$C$を求めよ。

(3)　$a=4\sqrt{2}$，$A=135°$ のとき，$R$を求めよ。

(4)　$b=10\sqrt{3}$，$R=10$ のとき，$B$を求めよ。

**2** △ABCについて，次の問いに答えよ。　**⇒ポイント2**

(1)　$a=5$，$c=2\sqrt{3}$，$B=30°$ のとき，$b$ を求めよ。

(2)　$a=\sqrt{10}$，$b=\sqrt{2}$，$c=4$ のとき，$A$を求めよ。

**3** △ABCにおいて，$a=3$，$b=8$，$c=7$ とし，点Aから直線BCに垂線AHを引くとき，次の問いに答えよ。

(1)　$C$を求めよ。

(2)　線分AHの長さを求めよ。

**4** △ABCにおいて，$a=6$，$b=7$，$c=8$，辺BCの中点をMとするとき，次の問いに答えよ。

**⇒ポイント2**

(1)　$\cos B$の値を求めよ。

(2)　線分AMの長さを求めよ。

**5** △ABCについて，次の問いに答えよ。　**⇒ポイント3**

(1)　$b=7$，$A=30°$，$C=120°$ のとき，$c$ を求めよ。

(2)　$a=4$，$A=45°$，$B=75°$ のとき，$c$ を求めよ。

**6** △ABCの3辺の長さが次のとき，△ABCは鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれであるか。

**⇒ポイント4**

(1)　$a=6$，$b=8$，$c=10$

(2)　$a=4\sqrt{2}$，$b=5$，$c=6$

**7** $x$を$2\sqrt{2}$より大きい実数とする。3辺の長さが

$a=4\sqrt{2}$，$b=c=x$

である二等辺三角形ABCが鈍角三角形となるような$x$の値の範囲を求めよ。　**⇒ポイント4**

**8** △ABCにおいて，$\sin A:\sin B:\sin C=3:7:8$ のとき，次の比や値，角の大きさを求めよ。

(1)　$a:b:c$

(2)　$\cos B$

(3)　$B$

(4)　$\tan C$

**9** 次の各場合について，△ABCの残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1) $b=2$，$c=1+\sqrt{3}$，$A=60^\circ$　　(2) $a=3\sqrt{2}$，$b=3-\sqrt{3}$，$C=45^\circ$

## パート 2 (p.10，11)

**10** 次の各場合について，△ABCの 3 つの角の大きさを求めよ。　**⇒例題 1**

(1) $a=6$，$b=3\sqrt{2}+\sqrt{6}$，$c=2\sqrt{6}$　　(2) $a=6-2\sqrt{3}$，$b=4\sqrt{3}$，$c=6\sqrt{2}$

**11** 次の各場合について，△ABCの残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。　**⇒例題 2**

(1) $a=6\sqrt{3}$，$c=9\sqrt{2}$，$C=120^\circ$　　(2) $b=8$，$c=4\sqrt{6}$，$B=45^\circ$

**12** △ABCにおいて，$a-b=2$，$c=7$，$C=120^\circ$ のとき，$a$，$b$ を求めよ。

## パート 3

**13** 四角形ABCDにおいて，AB=3，BC=$\sqrt{2}$，CD=1，DA=$2\sqrt{2}$，∠A=45° であるとき，次の問いに答えよ。

(1) 対角線BDの長さを求めよ。　　(2) △ABDの外接円の半径 $R$ を求めよ。

(3) ∠BCDの大きさを求めよ。

**14** 池を隔てた 2 地点A，B間の距離を求めるために，地点Cを選んで測量したら，CA=180m，∠BAC=75°，∠ACB=45° となった。このとき， 2 地点A，B間の距離は何mか求めよ。ただし，必要であれば，$\sqrt{6}=2.449$ とし，答えは小数第 1 位を四捨五入して，整数で答えよ。

**15** △ABCにおいて，次の等式が成り立っているとき，△ABCはどのような三角形か答えよ。

(1) $\sin A=\cos B\sin C$　　(2) $a\cos A=b\cos B$