はじめに

本テキストは，皆さんが無理なく基本をマスターし，かつ応用力を養成できるように編集してあります。

単元ごとに，知識の確認のための基本事項とそれを定着させるための例題があり，さらに問題を解く力を確実にするために，演習問題Ａと演習問題Ｂが段階を追って配列してあります。また，分からない問題がでてきたら，すぐに基本事項や例題に戻って，新出の用語・公式・法則などを確認し，その使い方を見ることができます。

数学は暗記だけでは対応できない科目です。本テキストの学習を通じ，基本事項の利用法と正解へのプロセスを体得し，実力を確かなものにされることを願っています。

構成と活用法

本テキストは，次のように構成されています。

▶基本事項　問題を解くにあたって必要とされる用語・公式・法則などがまとめてあります。

▶例　題　基本事項で得た知識を，実際に問題の中で使ってみることによって身につけます。

▶演習問題A　ここに集めてある問題は，演習問題Ｂに取り組む前にこれだけは押さえておきたいという，必要最低限のレベルです。解けた場合も，そうでない場合も，正解に至るまでの解法を必ず確認しましょう。

▶演習問題B　標準から発展レベルの問題を収録してあります。基本事項・例題で学んだ知識・解法をどのように応用していけばよいかを考えながら，問題に向かうと効果的です。

もくじ —— 数学A

第1講　確　率　(1)

基本事項

1　確率の計算

試行Tにおいて，同様に確からしいすべての根元事象がN通りあり，事象Aに属する根元事象がそのうちのa通りあるとき，事象Aの確率は，$P(A)=\dfrac{a}{N}$

2　和事象と積事象

2つの事象A，Bに対し

AとBの和事象は，AまたはBで，$A\cup B$と表す。

AとBの積事象は，AかつBで，$A\cap B$と表す。

$A\cap B=\phi$（空事象）のとき，AとBは互いに排反であるという。

3　確率の値の範囲

任意の事象Aに対し，$0\leqq P(A)\leqq 1$であり

$P(A)=0$となるのは$A=\phi$のとき

$P(A)=1$となるのは$A=U$（全事象）のとき

である。

4　確率の加法定理

2つの事象A，Bに対し，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$が成り立つ。

とくに，AとBが互いに排反のときは，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

5　余事象

事象Aに対し，Aが起こらないという事象をAの余事象といい，$\overline{A}$で表す。

6　余事象の確率の公式

$P(\overline{A})=1-P(A)$

がつねに成り立つ。

7　余事象の利用

確率の計算の方法は，与えられた条件から直接計算する方法と，余事象の確率を利用する方法とがつねにあり，計算が楽なほうを用いるのがよい。

8　復元抽出と非復元抽出

いくつかのものを取り出すときに，一度取り出したものをもとに戻してから次のものを取り出すのが復元抽出，もとに戻さずに次のものを取り出すのが非復元抽出である。

復元抽出のときは重複順列を，非復元抽出のときは順列を元に計算するのが原則である。

例題 1

同じ大きさの赤球が5個，白球が4個，青球が3個ある。この中から4個を取り出すとき，3色がすべてそろって取り出される確率を求めよ。

解答

12個の球から4個の球を取り出す組合せは

$${}_{12}\mathrm{C}_4=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=495\text{（通り）}$$

このうち，3色すべてがそろっている組合せは

(i) （赤，赤，白，青） ⟵ 4個取り出すので，必ず2個ある球がある。

(ii) （赤，白，白，青）

(iii) （赤，白，青，青）

の3通りある。

それぞれの場合の数は

(i) ${}_5C_2\times{}_4C_1\times{}_3C_1=10\times4\times3=120$（通り）

(ii) ${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_3C_1=5\times6\times3=90$（通り）

(iii) ${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_2=5\times4\times3=60$（通り）

であるから，求める確率は

$$\frac{120+90+60}{495}=\frac{270}{495}=\frac{6}{11}$$

例題2

袋の中に4個の赤球と3個の白球が入っていて，この袋から1個ずつ球を取り出すものとする。次の確率を求めよ。

(1) 取り出すたびに，袋に球を戻す場合，3回目に白球の出る確率。

(2) 取り出した球を袋に戻さない場合，3回目に白球の出る確率。

解答

(1) 袋に球を戻す場合，3回目の結果は，1回目と2回目に起きたことに影響されないから，求める確率は

$$\frac{{}_3C_1}{{}_7C_1}=\frac{3}{7}$$

(2) 3回の球の出方は

赤赤白，赤白白，白赤白，白白白

であるから，それぞれの場合の数は

$4\times3\times3$，$4\times3\times2$，$3\times4\times2$，$3\times2\times1$

また，全事象は7個から3個取り出して一列に並べる場合の数で

${}_7P_3=7\cdot6\cdot5$（通り）

よって，求める確率は

$$\frac{4\cdot3\cdot3+4\cdot3\cdot2+3\cdot4\cdot2+3\cdot2\cdot1}{7\cdot6\cdot5}=\frac{90}{210}=\frac{3}{7}$$

例題3

袋の中に1から6までの数字が書いてある球が，2個ずつ合計12個ある。この中から3個の球を同時に取り出す。次の確率を求めよ。

(1) 3つの数の和が5である確率。

(2) 3つの数のうち最も大きい数が4である確率。

(3) 3つの数の積が偶数である確率。

解答

3個の球を取り出す組合せは

$${}_{12}C_3=\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=220\text{（通り）}$$

(1)　3つの数の和が5となるのは

(1, 1, 3), (1, 2, 2)

の2通りあり，それぞれの場合の数は2通りずつあるから，求める確率は

$$\frac{2+2}{220}=\frac{1}{55}$$

《注》　同じ数字が書いてある球も当然区別して考える。

つまり，(1, 1′, 2, 2′, 3, 3′, 4, 4′, 5, 5′, 6, 6′)の計12個の球があると考えればよい。

3つの数の和が5となるのは

(1, 1′, 3), (1, 1′, 3′), (1, 2, 2′), (1′, 2, 2′)

の計4通りである。

(2)　最も大きい数が4であるのは

(3つの数がすべて4以下である組)−(3つの数がすべて3以下である組)

ここで，

3つの数がすべて4以下 $\longrightarrow {}_8C_3=56$(通り)

3つの数がすべて3以下 $\longrightarrow {}_6C_3=20$(通り)

であるから，求める確率は

$$\frac{56-20}{220}=\frac{36}{220}=\frac{9}{55}$$

(3)　3つの数がすべて奇数となるのは，${}_6C_3=20$(通り)　　⟵3つの数の積が奇数となる確率は，$\frac{20}{220}=\frac{1}{11}$

したがって，余事象を考えて，求める確率は

$$1-\frac{20}{220}=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$$

《参考》

余事象を使わないで直接考えると，3個の球は

(偶, 偶, 偶), (偶, 偶, 奇), (偶, 奇, 奇)

これらの場合の数はそれぞれ

${}_6C_3$, ${}_6C_2\times{}_6C_1$, ${}_6C_1\times{}_6C_2$

よって，求める確率は

$$\frac{{}_6C_3+{}_6C_2\times{}_6C_1\times2}{220}=\frac{200}{220}=\frac{10}{11}$$

例題4

15本のくじの中に5本の当たりくじが入っている。この中から同時に2本引いて少なくとも1本当たる確率を求めよ。

解答

余事象は「1本も当たらない」こと。

(当たり5本＋はずれ10本)の中から2本を引く組合せは

$${}_{15}C_2=\frac{15\cdot14}{2\cdot1}=105\text{(通り)}$$

このうち(はずれ10本)の中から2本を引く組合せは

$${}_{10}C_2=\frac{10\cdot9}{2\cdot1}=45\text{(通り)}$$

であることから，求める確率は

$$1-\frac{45}{105}=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$$

演 習 問 題 A

1 3個のさいころを同時に投げるとき，次の確率を求めよ。

(1) 目の和が5になる確率。

(2) 目の和が10になる確率。

(3) 目の和が15になる確率。

(4) 目の和が5の倍数になる確率。

2 赤球3個，白球3個，青球3個の計9個が入っている袋から，同時に5個の球を取り出すとき，その中に同じ色の球が3個含まれている確率を求めよ。

3 袋の中に1，2，3の数字を書いた札を1枚ずつ，計3枚入れる。よく混ぜて1枚ずつ順に3枚を取り出す。このとき，次の条件をすべて満たす確率を求めよ。

① 1枚目は1の札ではない。 ② 2枚目は2の札ではない。 ③ 3枚目は3の札ではない。

4 1から6までの数字が1枚に1つずつ記してあるカードが6枚ある。この中から2枚を無作為に選び出し，この2枚のカードに記してある数字のうち，小さい方をm，大きい方をnとするとき，$\dfrac{n}{m}$が整数となる確率を求めよ。

5 10本のくじの中に，3本の当たりくじがある。このくじを最初にAが引き，次にBが引くとき，次の確率を求めよ。ただし，Aが引いたくじはもとに戻さないものとする。

(1) Aがくじに当たる確率。

(2) Bがくじに当たる確率。

6 A，B，C，D，Eの５人が１列に並ぶとき，次の確率を求めよ。

⑴　A，Bが両端に並ぶ確率。

⑵　A，Bが隣り合わない確率。

7 白球７個，赤球３個が入っている袋から同時に６個の球を取り出すとき，白球の個数が赤球の個数より多い確率を求めよ。

8 １から９までの数字が１つずつ書かれたカード９枚の中から２枚を取り出すとき，次の確率を求めよ。

⑴　２枚の数字の和が偶数になる確率。

⑵　２枚の数字の積が偶数になる確率。

9 白球５個，赤球 n 個が入っている袋がある。この袋から２個の球を同時に取り出すとき，白球と赤球が１個ずつ出る確率を P_n とする。P_n を最大にする n の値を求めよ。

10 ３個のさいころを同時に投げるとき，出た目の積が６以上である確率を求めよ。

演習問題B

1　8本のくじの中に当たりくじが3本ある。これをA，B，Cの3人がこの順に1本ずつ引くとき，次の確率を求めよ。ただし，引いたくじはもとに戻さないものとする。

(1)　AとBがはずれてCが当たる確率。

(2)　1人だけ当たる確率。

2　5個の自然数1，2，3，4，5がある。この中から同時に任意の3個の数を選び，それらをa，b，cとするとき，次の問いに答えよ。

(1)　a，b，cの組合せをすべて書け。

(2)　a，b，cを3辺の長さとする三角形が出来る確率を求めよ。

3　10人を5人ずつの2つのグループに分けるとき，特定の2人が同じグループに入る確率を求めよ。

4　5個のさいころを同時に投げて出た目のすべてをかけ合わせてできる数をXとする。次の確率を求めよ。

(1)　Xが偶数である確率。

(2)　$X \leqq 6$である確率。

5　ある袋の中に，n個の白球が入っている。この袋から，5個の球を同時に取り出し，赤い印をつけてもとの袋に戻した。それからよくかきまぜて，5個の球を同時に取り出したところ，2個の球に赤い印があった。この確率が最大となるnを求めよ。