第1講　2次関数のグラフと最大・最小

ポイント 1 関数

関数

　2つの変数 x, y があり，x の値を定めると，対応する y の値がただ1つ定まるとき，y は x の関数であるという。

　y が x の関数であるとき，これを $y=f(x)$ のように表す。

　$y=f(x)$ において，x が値 a をとるときの y の値を $f(a)$ と書き，この値を $x=a$ における関数の値という。

定義域・値域

　関数 $y=f(x)$ において，x のとりうる値の範囲を，この関数の定義域という。また，x が定義域全体を動くとき，y のとる値の範囲を，この関数の値域という。関数 $y=f(x)$ の定義域が $a \leqq x \leqq b$ であることを，$y=f(x)\ (a \leqq x \leqq b)$ のように書いて表すことも多い。

チェック1　次の関数の値域を求めよ。また，最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=3x-8\quad (2 \leqq x \leqq 5)$

(2)　$y=-2x+7\quad (-3<x \leqq 1)$

(3)　$y=\dfrac{1}{2}x+8\quad (x \geqq -6)$

(4)　$y=-4x-1\quad \left(x<\dfrac{3}{2}\right)$

ポイント 2 2次関数のグラフ

　x の2次式で表される関数を，2次関数という。

　2次関数のグラフは，対称の軸を1つもつ線対称な放物線である。対称の軸をこのグラフの軸といい，軸とグラフの交点をこのグラフの頂点という。

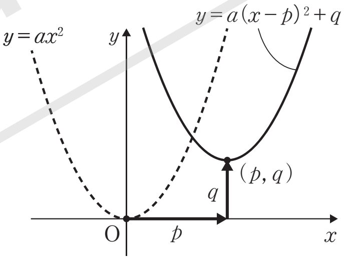
　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したもので，軸，頂点，グラフの形は次のようになる。

　軸：直線 $x=p$

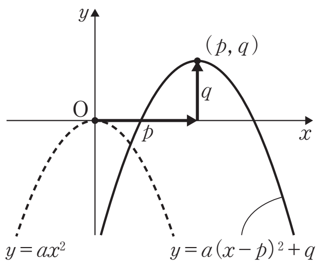
　頂点：点 $(p,\ q)$

　グラフの形：$\begin{cases} a>0 \text{ のとき，下に凸（とつ）} \\ a<0 \text{ のとき，上に凸} \end{cases}$

$a>0$ のとき



$a<0$ のとき



　2次関数は一般に $y=ax^2+bx+c\ (a \neq 0)$ の形の式で表されるが，平方完成した $y=a(x-p)^2+q$ の形で考えると，上のようにグラフのようすを考えやすい。

チェック2　次の2次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=5x^2$

(2)　$y=-x^2+4$

(3)　$y=3(x-4)^2$

(4)　$y=-2(x+3)^2-1$

(5)　$y=x^2+6x+4$

(6)　$y=-3x^2+12x-8$

ポイント 3 2次関数の決定

条件から2次関数を求めるとき，頂点や軸の条件が与えられている場合は $y=a(x-p)^2+q$ の形，それ以外の場合は $y=ax^2+bx+c$ の形を利用して計算するとよい。

(1) 頂点と他の1点が与えられているとき

① 2次関数を $y=a(x-p)^2+q$ とおき，p，q に頂点の座標を代入する。

② x，y に他の1点の座標を代入して方程式を作り，a の値を求める。

(2) 軸と2点が与えられているとき

① 2次関数を $y=a(x-p)^2+q$ とおき，p に軸の式の x の値を代入する。

② x，y に2点の座標をそれぞれ代入して連立方程式を作り，a，q の値を求める。

(3) 3点が与えられているとき

① 2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおき，x，y に3点の座標をそれぞれ代入して，連立方程式を作る。

② a，b，c の値を求める。まず c を消去し，a，b を求めると効率がよいことが多い。

チェック3 グラフが次の条件を満たす2次関数を求めよ。

(1) 頂点が点$(-1,\ 9)$で，点$(-3,\ -7)$を通る。

(2) 軸が直線 $x=2$ で，2点$(-1,\ 11)$，$(4,\ 1)$を通る。

(3) 3点$(-1,\ -3)$，$(-4,\ 3)$，$(-5,\ 1)$を通る。

(4) 3点$(-2,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(0,\ -4)$を通る。

ポイント 4 2次関数の最大・最小

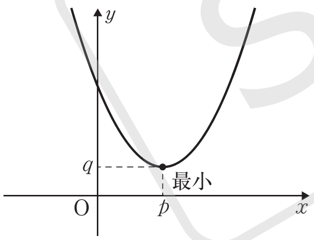
2次関数の最大・最小問題では，関数の式を $y=a(x-p)^2+q$ の形で表し，グラフを用いて考えていく。

一般に，2次関数 $y=a(x-p)^2+q$ の最大値・最小値について，次のことがいえる。

$a>0$(グラフが下に凸)のとき

$x=p$ で，最小値 q をとる。

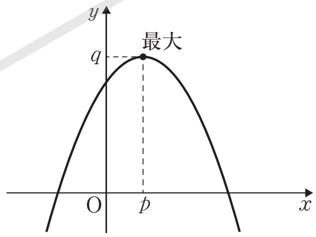
最大値はない。



$a<0$(グラフが上に凸)のとき

$x=p$ で，最大値 q をとる。

最小値はない。



定義域に制限がある場合は，軸を含むかと，定義域の両端での y の値に着目して，最大値・最小値を決定する。

チェック4 次の2次関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=x^2+4x-2$

(2) $y=-3x^2+6x+2$

(3) $y=2x^2+8x-1$ $(-4\leqq x\leqq -1)$

(4) $y=-x^2+8x-4$ $(0\leqq x\leqq 3)$

(5) $y=-\dfrac{1}{2}x^2-x$ $(-2<x<2)$

(6) $y=\dfrac{1}{4}x^2-3x+6$ $(2<x\leqq 4)$

例題 1 2次関数のグラフの移動

放物線 $y=5x^2-20x+16$ を次のように移動させるとき，その放物線を表す 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ の形で表せ。

(1) x 軸方向に -5，y 軸方向に 3 だけ平行移動　　(2) 原点に関して対称移動

アプローチ

(1) 平行移動の問題は次の 2 通りの方法で解くことができる。

① 2 次関数の式を平方完成し，移動の前後での頂点の位置関係を捉える。点$(a,\ b)$を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ移動して得られる点の座標は$(a+p,\ b+q)$となる。

② 関数 $y=f(x)$のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動したグラフの式が $y-q=f(x-p)$ であることを用いる。

※ 一般に，x^2 の係数が等しい放物線は合同なので，平行移動により重ね合わせることができる。

(2) 対称移動の問題の解き方も 2 通りある。

① 移動後の頂点の位置とグラフの向きを考える。$y=a(x-p)^2+q$ のグラフを x 軸，y 軸，原点に関して対称移動して得られる 2 次関数の式は，それぞれ下の表のようになる。

② $y=f(x)$のグラフを x 軸，y 軸，原点に関して対称移動したグラフの式がそれぞれ下の表のようになることを用いる。

		x 軸	y 軸	原点
①	グラフの向き	逆向きになる	変わらない	逆向きになる
	頂点$(p,\ q)$	$(p,\ -q)$	$(-p,\ q)$	$(-p,\ -q)$
	$y=a(x-p)^2+q$	$y=-a(x-p)^2-q$	$y=a(x+p)^2+q$	$y=-a(x+p)^2-q$
②	$y=f(x)$	$-y=f(x)$	$y=f(-x)$	$-y=f(-x)$

解答

$y=5x^2-20x+16$
$\quad=5(x^2-4x)+16$
$\quad=5\{(x-2)^2-2^2\}+16$
$\quad=5(x-2)^2-20+16$
$\quad=5(x-2)^2-4$

より，放物線 $y=5x^2-20x+16$ の頂点は点$(2,\ -4)$

(1) x 軸方向に -5，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，頂点は点$(-3,\ -1)$に移るので

$y=5(x+3)^2-1$
$\quad=5x^2+30x+44$

(別解)

放物線 $y=5x^2-20x+16$ を x 軸方向に -5，y 軸方向に 3 だけ平行移動したグラフの式は

$y-3=5\{x-(-5)\}^2-20\{x-(-5)\}+16$

$y=5(x^2+10x+25)-20(x+5)+16+3$
$\quad=5x^2+50x+125-20x-100+19$
$\quad=5x^2+30x+44$

(2) 原点に関して対称移動すると，頂点が点$(-2,\ 4)$に移り，グラフが上に凸となるので

$y=-5(x+2)^2+4$
$\quad=-5x^2-20x-16$

(別解)

放物線 $y=5x^2-20x+16$ を原点に関して対称移動したグラフの式は

$-y=5(-x)^2-20(-x)+16$
$\quad=5x^2+20x+16$

よって，$y=-5x^2-20x-16$

類題 1 放物線 $y=-2x^2-4x+3$ を次のように移動させるとき，その放物線を表す 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ の形で表せ。

(1) x 軸方向に 4，y 軸方向に -6 だけ平行移動　　(2) x 軸に関して対称移動

(3) y 軸に関して対称移動　　(4) 原点に関して対称移動

例題 2　係数や定義域に文字を含む２次関数の最大・最小

a を正の定数とする。２次関数 $y=x^2-6x+3 \quad (0 \leqq x \leqq a)$ について，次の値を求めよ。

(1)　最大値　　　　(2)　最小値

アプローチ

定義域に文字を含む場合，文字の値によって定義域の幅や位置が変わる。本問の場合，a の値が大きくなるほど，定義域の上端が大きくなり，定義域の幅が広くなる。

２次関数の係数に文字を含む場合，文字の値によってグラフの位置や形が変わる。

定義域や係数に文字を含む場合，文字の値によって定義域が軸を含むかや，定義域の両端での値が変わり，どの位置で最大値・最小値をとるかが変わるので，場合分けをする必要がある。

２次関数 $y=ax^2+bx+c$ で，$a>0$（グラフが下に凸）の場合，最大値･最小値の場合分けの基準はそれぞれ次のようになる。

(1)　最大値

定義域の両端で y の値が一致するような x の値に着目して場合分けをする。

一致するとき…定義域の両端で最大値をとる。

一致しないとき…定義域の両端のうち，軸から離れている方で最大値をとる。

(2)　最小値

定義域に軸を含むかどうかに着目して場合分けをする。

軸を含むとき…頂点で最小値をとる。

軸を含まないとき…定義域の両端のうち，軸に近い方で最小値をとる。

$a<0$（グラフが上に凸）の場合は，最大値･最小値で上の基準を入れ替えて考えればよい。

解答

右辺を平方完成すると

$y=(x-3)^2-6 \quad (0 \leqq x \leqq a)$

(1)　$x=0$ のとき $y=3$ であり，$3=x^2-6x+3$ とすると

$x^2-6x=0$

$x(x-6)=0$

$x=0,\ 6$

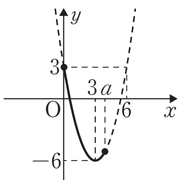
よって，最大値は，次のようになる。

(i)　$0<a<6$ のとき，$x=0$ で最大値 3

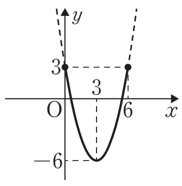
(ii)　$a=6$ のとき，$x=0,\ 6$ で最大値 3

(iii)　$6<a$ のとき，$x=a$ で最大値 a^2-6a+3

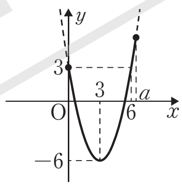
(i)



(ii)



(iii)

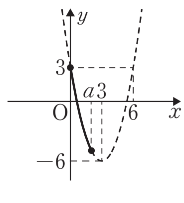


(2)　定義域に軸を含むかで場合分けすると，最小値は次のようになる。

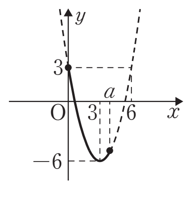
(iv)　$0<a<3$ のとき，$x=a$ で最小値 a^2-6a+3

(v)　$3 \leqq a$ のとき，$x=3$ で最小値 -6

(iv)



(v)



類題 2　２次関数 $y=x^2-2ax+a^2+3 \quad (1 \leqq x \leqq 7)$ について，次の値を求めよ。

(1)　最大値　　　　(2)　最小値

演　習　問　題

パート 1 (p.2, 3)

1 次の関数$f(x)$について，$f(2)$，$f(-5)$，$f(a-3)$の値を，それぞれ求めよ。　**⇒ポイント1**

(1)　$f(x)=4x-7$

(2)　$f(x)=-2x^2-5x$

2 次の問いに答えよ。　**⇒ポイント1**

(1)　関数$f(x)=-2ax+15$が$f(3)=3$を満たすとき，定数aの値を求めよ。

(2)　関数$f(x)=ax+b$が$f(-3)=10$，$f(12)=0$を満たすとき，定数a，bの値を求めよ。

(3)　kを0でない定数とする。関数$f(x)=x^2-9x+7$において，$f(2)=f(2+k)$が成り立つとき，kの値を求めよ。

3 次の2次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。　**⇒ポイント2**

(1)　$y=x^2+8$

(2)　$y=x^2+8x$

(3)　$y=2x^2-12x+9$

(4)　$y=-4x^2-16x-15$

(5)　$y=x^2+5x+1$

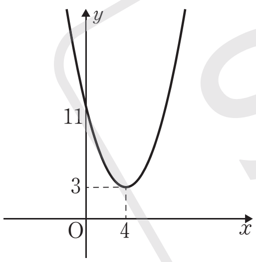
(6)　$y=-3x^2+5x-4$

(7)　$y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}$

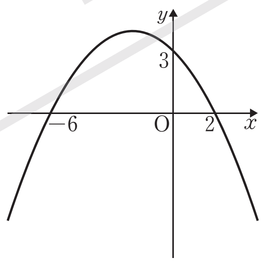
(8)　$y=-\frac{1}{4}(x-3)(x+5)$

4 次の2次関数のグラフの式を求めよ。　**⇒ポイント3**

(1)



(2)



5 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。　**⇒ポイント4**

(1)　$y=2x^2-16x+27$

(2)　$y=-(x-7)(x+1)$

(3)　$y=-\frac{3}{2}x^2-6x+10$　$(-6\leqq x\leqq 0)$

(4)　$y=\frac{2}{3}(2x-5)(2x+1)$　$(-2<x<3)$

(5)　$y=4x^2-2x-5$　$(-2\leqq x\leqq -1)$

(6)　$y=-2x^2-7x+2$　$(-1\leqq x<1)$

6 直角をはさむ2辺の長さの和が16の直角三角形において，面積が最大となるときの面積と，3辺の長さをそれぞれ求めよ。

パート 2 (p.4，5)

7 放物線 $y=3x^2-18x+20$ を次のように移動させるとき，その放物線を表す 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ の形で表せ。　**⇒例題 1**

(1)　x 軸方向に -4，y 軸方向に 5 だけ平行移動　　(2)　x 軸に関して対称移動

(3)　y 軸に関して対称移動　　(4)　原点に関して対称移動

8 次の問いに答えよ。　**⇒例題 1**

(1)　放物線 $y=4x^2-8x+1$ を放物線 $y=4x^2+24x+30$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。

(2)　放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に 4，y 軸方向に -3 だけ平行移動すると放物線 $y=-2x^2+12x-20$ に重なるとき，a，b，c の値を求めよ。

9 次の 2 次関数について，最大値，最小値をそれぞれ求めよ。　**⇒例題 2**

(1)　$y=x^2-2x+4$　$(0\leqq x\leqq a)$　（a は正の定数）

(2)　$y=x^2-6x+10$　$(a\leqq x\leqq a+2)$

(3)　$y=x^2-4ax+4a^2+5$　$(2\leqq x\leqq 6)$

パート 3

10 次の問いに答えよ。

(1)　2 次関数 $y=x^2-8x+c$　$(-1\leqq x\leqq 6)$ の最大値が11であるとき，定数 c の値を求めよ。また，このとき，この関数の最小値を求めよ。

(2)　2 次関数 $y=ax^2+4ax+b$ の $-4\leqq x\leqq 2$ における最大値が 8 で最小値が 0 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

11 次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=-3x^4+6x^2+1$ について，$x^2=t$ とおいたとき，t がとる値の範囲を求めよ。また，もとの関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(2)　関数 $y=(x^2+2x)^2+8(x^2+2x)+10$ において，$x^2+2x=t$ とおいたとき，t がとる値の範囲を求めよ。また，もとの関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

12 関数 $f(x)=|2x-8|$ について，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。　　(2)　$f(2)$ の値を求めよ。

13 次の問いに答えよ。

(1)　$x+y+4=0$ のとき，xy，x^2-3y^2 の最大値をそれぞれ求めよ。

(2)　$2x+y=8$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のとき，$4x^2+y^2$ の最大値，最小値を求めよ。