はじめに

本テキストは，皆さんが無理なく基本をマスターし，かつ応用力を養成できるように編集してあります。

単元ごとに，知識の確認のための基本事項とそれを定着させるための例題があり，さらに問題を解く力を確実にするために，演習問題Ａと演習問題Ｂが段階を追って配列してあります。また，分からない問題がでてきたら，すぐに基本事項や例題に戻って，新出の用語・公式・法則などを確認し，その使い方を見ることができます。

数学は暗記だけでは対応できない科目です。本テキストの学習を通じ，基本事項の利用法と正解へのプロセスを体得し，実力を確かなものにされることを願っています。

構成と活用法

本テキストは，次のように構成されています。

- **▶基本事項**　問題を解くにあたって必要とされる用語・公式・法則などがまとめてあります。
- **▶例　　題**　基本事項で得た知識を，実際に問題の中で使ってみることによって身につけます。
- **▶演習問題Ａ**　ここに集めてある問題は，演習問題Ｂに取り組む前にこれだけは押さえておきたいという，必要最低限のレベルです。解けた場合も，そうでない場合も，正解に至るまでの解法を必ず確認しましょう。
- **▶演習問題Ｂ**　標準から発展レベルの問題を収録してあります。基本事項・例題で学んだ知識・解法をどのように応用していけばよいかを考えながら，問題に向かうと効果的です。

もくじ —— 数学Ⅰ

第 1 講　2 次関数

基本事項

1　2次関数の決定

(1)　グラフの条件より

(i)　頂点$(p,\ q)\longrightarrow y=a(x-p)^2+q$

(ii)　軸 $x=p\longrightarrow$ 頂点を$(p,\ q)$として，$y=a(x-p)^2+q$

(iii)　x 軸と接する $\longrightarrow$ 頂点を$(p,\ 0)$として，$y=a(x-p)^2$

(iv)　x 軸との交点の x 座標が α，$\beta\longrightarrow y=a(x-\alpha)(x-\beta)$

(v)　点$(x_1,\ y_1)$を通る $\longrightarrow x=x_1$，$y=y_1$ を代入する。

(2)　最大値・最小値より

$x=p$ のとき最大(小)値が $q\longrightarrow y=a(x-p)^2+q$

2　2次関数の最大・最小

(1)　$y=a(x-p)^2+q$ について

(i)　$a>0$ のとき

グラフは下に凸で，最小値は，q ($x=p$ のとき)

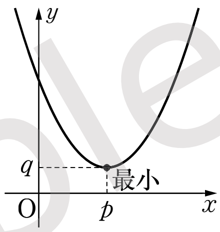
最大値は，ない。

(ii)　$a<0$ のとき

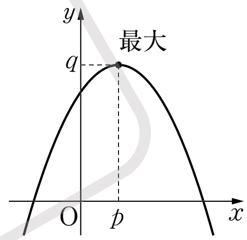
グラフは上に凸で，最大値は，q ($x=p$ のとき)

最小値は，ない。

$a>0$ のとき



$a<0$ のとき



(2)　$y=ax^2+bx+c$ について

平方完成により，$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ であるから

$p=-\dfrac{b}{2a}$，$q=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ として，(1)と同様に考える。

(3)　定義域がある場合の最大・最小

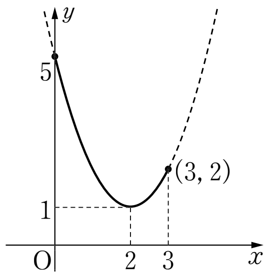
頂点，および定義域の端点における y の値を比較して，最大値・最小値を求める。

例　$0\leqq x\leqq 3$ のとき，$y=x^2-4x+5$ について

$y=(x-2)^2+1$ であるから，右のグラフより

最大値　5 ($x=0$ のとき)

最小値　1 ($x=2$ のとき)



3　グラフと2次不等式

2 次関数 $y=x^2-2x-2$ のグラフにおいて

x 軸より上側 $\Longleftrightarrow y>0$ より，$x^2-2x-2>0$ のとき

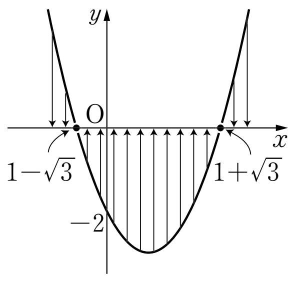
$x<1-\sqrt{3}$，$1+\sqrt{3}<x$

x 軸との交点 $\Longleftrightarrow y=0$ より，$x^2-2x-2=0$ のとき

$x=1\pm\sqrt{3}$

x 軸より下側 $\Longleftrightarrow y<0$ より，$x^2-2x-2<0$ のとき

$1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$



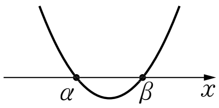
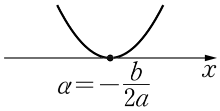
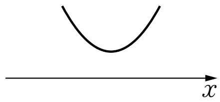
4　2次不等式を含む連立不等式

複数の不等式を解いて，各々の不等式の解に共通な範囲が解となる。

5 2次関数

$y=ax^2+bx+c$ のグラフと 2 次方程式，2 次不等式

$a>0$ とする。$\alpha=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$D=b^2-4ac$ として

判別式	$D>0$	$D=0$	$D<0$
グラフ			
$ax^2+bx+c=0$	異なる 2 つの実数解　$x=\alpha$，β	1 つの実数解(重解)　$x=\alpha$	解なし
$ax^2+bx+c>0$	$x<\alpha$，$\beta<x$	α 以外のすべての実数($x<\alpha$，$\alpha<x$)	すべての実数
$ax^2+bx+c\geqq 0$	$x\leqq\alpha$，$\beta\leqq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c<0$	$\alpha<x<\beta$	解なし	解なし
$ax^2+bx+c\leqq 0$	$\alpha\leqq x\leqq\beta$	$x=\alpha$	解なし

《注》 $a<0$ のときは，両辺に -1 をかけて，x^2 の係数が正となるように変形して考える。

6 すべての実数 x に対し成立する2次不等式

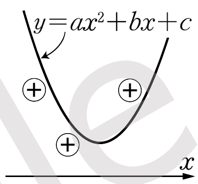
すべての実数 x に対し

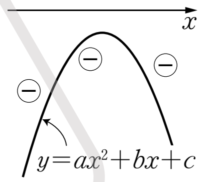
(1) $ax^2+bx+c>0 \iff a>0$，$D=b^2-4ac<0$

(2) $ax^2+bx+c\geqq 0 \iff a>0$，$D=b^2-4ac\leqq 0$

(3) $ax^2+bx+c<0 \iff a<0$，$D=b^2-4ac<0$

(4) $ax^2+bx+c\leqq 0 \iff a<0$，$D=b^2-4ac\leqq 0$





例題 1

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが 3 点$(1,\ 2)$，$(0,\ 9)$，$(-1,\ 18)$を通るとき，a，b，c の値を求めよ。

解答

点$(1,\ 2)$を通るから，　$2=a+b+c$　……①

点$(0,\ 9)$を通るから，　$9=c$　……②

点$(-1,\ 18)$を通るから，$18=a-b+c$　……③

②より，$c=9$ を①，③に代入して

$a+b=-7$　……④

$a-b=9$　……⑤

④，⑤を解くと

$a=1$，$b=-8$

例題 2

2 次関数 $y=x^2-2ax+b$ の頂点は線分 $x+y=2$ ($x\geqq 0$，$y\geqq 0$) の上にある。このとき，b の最大値および最小値を求めよ。

解答

$$y=x^2-2ax+b$$
$$=(x-a)^2-a^2+b$$

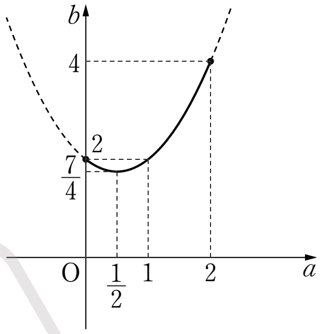
よって，頂点は$(a,\ -a^2+b)$である。

これが，線分$x+y=2$ $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ の上にあるとき

$a-a^2+b=2$ ……①

$a\geqq 0$ ……②

$-a^2+b\geqq 0$ ……③



①と③より

$-a^2+2+a^2-a\geqq 0$　　$a\leqq 2$

②と合わせて，$0\leqq a\leqq 2$

このとき

$$b=a^2-a+2$$
$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

したがって，

$a=\frac{1}{2}$ のとき，b は最小値$\frac{7}{4}$

$a=2$ のとき，b は最大値 4

をとる。

例題 3

すべての実数xに対して$2x^2+(t+1)x+2>0$が成り立つとき，定数tのとる値の範囲を求めよ。また，tがこの範囲にあるとき，関数$f(t)=-t^2-4t+2$のとる値の範囲を求めよ。

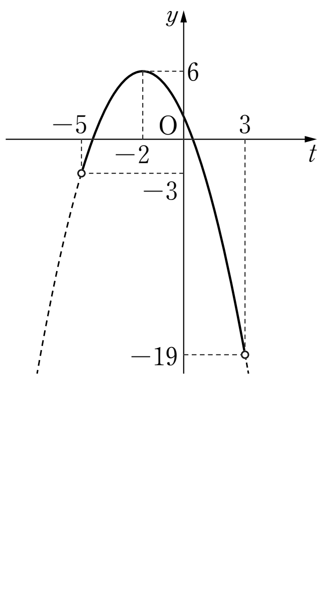
解答

$$g(x)=2x^2+(t+1)x+2$$
$$=2\left(x+\frac{t+1}{4}\right)^2-\frac{(t+1)^2}{8}+2$$

$y=g(x)$ のグラフの頂点のy座標が 0 より大きければ，すべての実数xに対して$g(x)>0$が成り立つ。

したがって

$$-\frac{(t+1)^2}{8}+2>0$$
$$(t+1)^2<16$$
$$(t+5)(t-3)<0$$
$$-5<t<3$$



次に

$$f(t)=-t^2-4t+2$$
$$=-(t+2)^2+6$$

$-5<t<3$ の範囲で，$y=f(t)$ のグラフは右図のようになる。

よって

$$-19<f(t)\leqq 6$$

演　習　問　題　A

1　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが 3 点(1，4)，(3，6)，(−2，16)を通るとき，a，b，c の値を求めよ。

2　2 次関数

$y=x^2+2ax+b$　……(A)

の係数 a，b が次の(1)，(2)，(3)，(4)，(5)の条件を満たす各場合について，座標平面上で，(A)によって表される放物線が通過する象限と，その放物線の頂点のある象限を記せ。

条件：(1)　$a>0$，$b<0$

(2)　$a>0$，$0<b<a^2$

(3)　$a>0$，$a^2<b$

(4)　$a<0$，$0<b<a^2$

(5)　$a<0$，$a^2<b$

3　放物線 $y=ax^2+bx+c$ は 2 点(2，0)，(−1，3)を通る。このとき，b，c を a を用いて表せ。
また，$ab+bc+ca$ のとり得る値の最大値を求めよ。

4　A市で営業中の路面電車は，運賃が100円(均一)のときに，1日の利用者は30000人であった。ところが，運賃改定にあたって10円値上げするごとに，1000人の割合で利用者が減少していったという。運賃をいくらにすれば，1日の収入は最大となるかを求めよ。また，その時の収入額はいくらか求めよ。

5　1辺の長さが a の正方形1つと，1辺の長さが b の正方形2つがあり，3つの正方形の周の長さの和は100であるとする。3つの正方形の面積の和が最小になるときの a，b の値と，面積の和を求めよ。

6 次の不等式を解け。

(1) $x^2-x-2>0$

(2) $2x^2-5x-7<0$

(3) $3x^2-8x-3>0$

7 x についての2次方程式

$$x^2+2ax+2a+6=0 \quad \cdots\cdots ①$$

について，次の問いに答えよ。

(1) ①が実数解をもたないような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) ①が重解をもつような a の値と，重解 x を求めよ。

8 2次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が $f(1)=13$，$f(2)=14$，$f(3)=18$ を満たすとき，$f(x)$ の式を求めよ。
また，このときの $f(x)\leqq 18$ の解を求めよ。

9 2次関数 $f(x)=2x^2-(3k-10)x+k^2-6k+8$ について，次の問いに答えよ。

(1) $k=2$ のとき，方程式 $f(x)=0$ を解け。

(2) $k=5$ のとき，放物線 $y=f(x)$ の頂点の座標を求めよ。

(3) 2次不等式 $f(x)<0$ の解が $3<x<4$ となるような k の値を求めよ。

10 実数 x，y の2次式 $4x^2+5y^2-4xy-6y+2$ が最小となるときの x，y の値と最小値を求めよ。

演習問題B

1 mが整数で，２次方程式

$$x^2-2(m+2)x+(m^2-1)=0$$

の２つの解が，ともに１より大きいとき，mの最小値を求めよ。

2 xについての方程式 $x^2-4|x-1|+a=0$ の異なる実数解の個数を調べよ。ただし，aは実数とする。

3 放物線 $y=x^2$ を，頂点が直線 $y=-3x+2$ 上にあるように平行移動した放物線について，次の問いに答えよ。ただし，頂点の x 座標を a とする。

(1) 放物線の方程式を a を用いて表せ。

(2) 放物線が原点を通るとき，その放物線の方程式を求めよ。

(3) 放物線と x 軸が異なる２点で交わり，２交点の x 座標がともに正であるような a の値の範囲を求めよ。

4 すべての実数 y に対して $x^2-3xy+y^2+x+y\geqq 0$ となるような実数 x の値の範囲を求めよ。

5 $f(x)=x^2+2ax-3a$ について，次の問いに答えよ。

(1) 任意の実数 x に対して，$f(x)>0$ となるような a の値の範囲を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 1$ の任意の x に対して，$f(x)>0$ となるような a の値の範囲を求めよ。