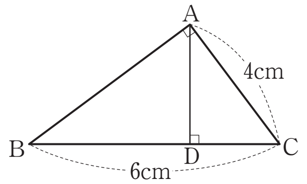
6 図形(2)

例題 1　三角形の相似

図は ∠A＝90° の直角三角形で，頂点 A から辺 BC に垂線 AD をひきます。

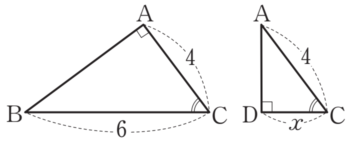


(1)　△ABC∽△DAC を証明しなさい。

(2)　AC＝4cm，BC＝6cm のとき，線分 DC の長さを求めなさい。

解法

(1)　対応する辺の比がわからないときは，2 組の等しい角を見つける。



答　[証明]　△ABC と △DAC で，

仮定より ∠BAC＝∠ADC＝90°…①，∠ACB＝∠DCA(共通)…②

①，②より，2 組の角がそれぞれ等しいので，△ABC∽△DAC

(2)　図のように分けてかき，対応する辺の長さを考える。

$x:4=4:6$，$6\times x=4\times 4$，$x=\frac{8}{3}$　　答 $\frac{8}{3}$**cm**

三角形の相似条件

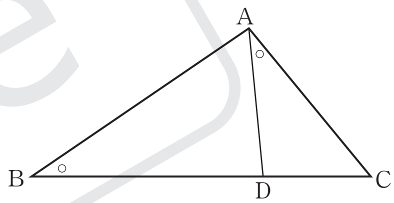
① 3 組の辺の比が等しい。

② 2 組の辺の比と，その間の角がそれぞれ等しい。

③ 2 組の角がそれぞれ等しい。

1　次の問いに答えなさい。

(1)　図の △ABC の辺 BC 上に，∠ABC＝∠DAC となる点 D をとります。

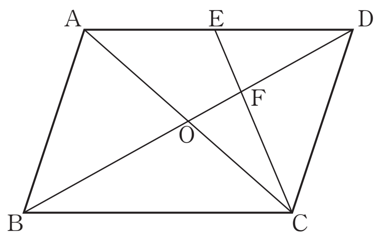


□①　△ABC∽△DAC を証明しなさい。

□②　AB＝8cm，BC＝10cm，AC＝4cm のとき，線分 AD の長さを求めなさい。

[　　　　　　]

(2)　図の平行四辺形ABCDで，Oは対角線の交点です。辺AD上に点Eをとり，線分 CE と対角線 BD の交点を F とします。

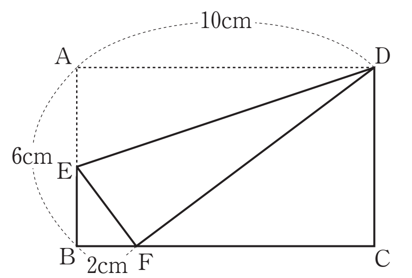


□①　△BCF∽△DEF を証明しなさい。

□②　点 E が辺 AD の中点で，BD＝18cm のとき，OF の長さを求めなさい。

[　　　　　　]

(3)　図のように AB＝6cm，AD＝10cm の長方形 ABCD を，DE を折り目として折り返すと，頂点 A が辺 BC 上の点 F に移り，BF＝2cm になりました。



□①　△BFE と相似な三角形を対応する頂点の順に書きなさい。

[　　　　　　]

□②　EF の長さを求めなさい。

[　　　　　　]

例題 2　相似比の活用

(1)　図 1 で，DE∥BC のとき，x，y の値を求めなさい。

(2)　図 2 で，M，N は辺 AB，AC の中点です。

　①　x，y の値を求めなさい。

　②　△ABC の面積は △AMN の面積の何倍ですか。

図 1

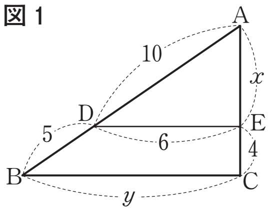
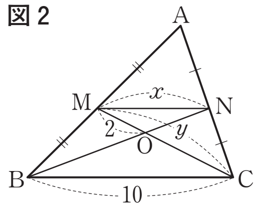


図 2



解法

(1)　$x:4=10:5$ より，$\boldsymbol{x=8}$

　$y:6=(10+5):10$ より，$\boldsymbol{y=9}$

(2)①　中点連結定理より，$x=10\times\frac{1}{2}$，

　　$\boldsymbol{x=5}$　$(y-2):2=10:5$ より，$\boldsymbol{y=6}$

　②　相似比は 2 : 1，面積比は $2^2:1^2=4:1$

答　**4 倍**

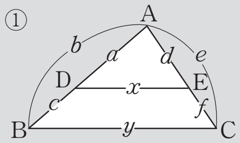
①　DE∥BC ならば $\begin{cases} a:b=d:e=x:y \\ a:c=d:f \end{cases}$

①′　$a:b=d:e$，または $a:c=d:f$ ならば　DE∥BC

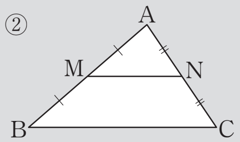
②　M，N が辺 AB，AC の中点のとき MN∥BC，$\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}$

③　相似比が $a:b$ の図形の面積比 $=a^2:b^2$，体積比 $=a^3:b^3$

①



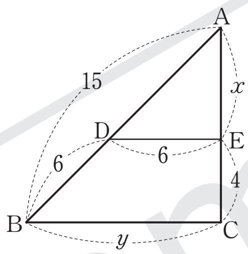
②



2　次の問いに答えなさい。

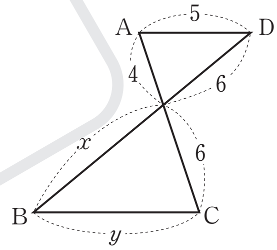
(1)　次の x，y の値を求めなさい。

□①　DE∥BC



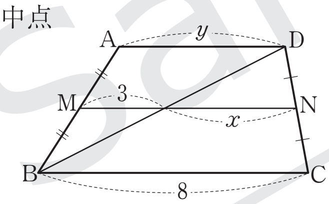
[　　　　　　　　]

□②　AD∥BC



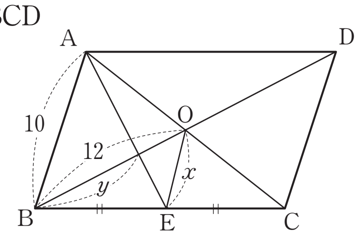
[　　　　　　　　]

□③　AD∥BC，M，N は中点



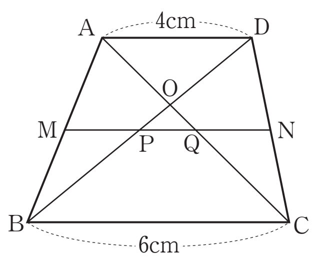
[　　　　　　　　]

□④　E は平行四辺形 ABCD の辺 BC の中点



[　　　　　　　　]

(2)　図は AD=4cm，BC=6cm，AD∥BC の台形 ABCD で，O は対角線の交点，M，N はそれぞれ辺 AB，DC の中点です。線分 MN と対角線 BD，AC との交点をそれぞれ P，Q とします。



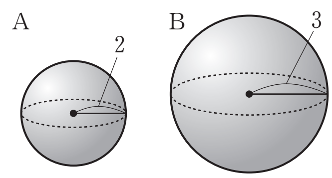
□①　PQ の長さを求めなさい。

[　　　　　　　　]

□②　△OBC の面積は △ODA の面積の何倍ですか。

[　　　　　　　　]

□(3)　半径が 2cm の球 A と，半径が 3cm の球 B があります。B の体積は A の体積の何倍ですか。



[　　　　　　　　]

例題 3　円周角の定理・円周角の定理の逆

(1)　図 1 で線分 AB は直径です。

①　$\angle x$，$\angle y$ の大きさを求めなさい。

②　$\overset{\frown}{AD}:\overset{\frown}{DB}$ を最も簡単な整数の比で表しなさい。

(2)　図 2 で，1 つの円周上にある 4 点の組を，2 組答えなさい。

図 1

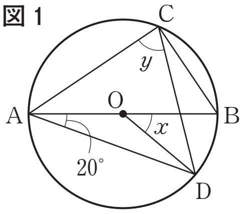
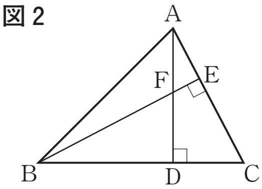


図 2



解法

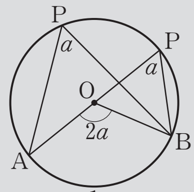
(1)①　$\angle x=20^\circ\times2=40^\circ$，また $\angle ACB=90^\circ$，$\angle DCB=20^\circ$ だから $\angle y=90^\circ-20^\circ=70^\circ$

答　$\angle x=40^\circ$，$\angle y=70^\circ$

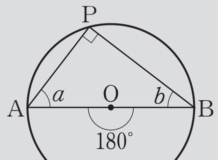
②　$\overset{\frown}{AD}:\overset{\frown}{DB}=\angle ACD:\angle DCB$　**答**　**7 : 2**

(2)　$\angle ADB=\angle AEB=90^\circ$　また $\angle FEC=\angle FDC=90^\circ$ より E，D は CF を直径とする円周上にある。

答　(A，B，D，E)，(E，F，D，C)

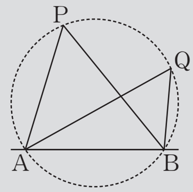


$\angle APB=\dfrac{1}{2}\angle AOB$



$\angle APB=90^\circ$

$\angle a:\angle b=\overset{\frown}{PB}:\overset{\frown}{PA}$

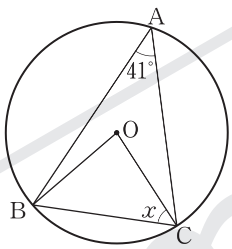


$\angle APB=\angle AQB$ ならば4 点 A, B, P, Q は同一円周上にある

3　次の問いに答えなさい。

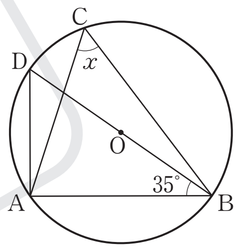
(1)　$\angle x$ の大きさを求めなさい。

□①



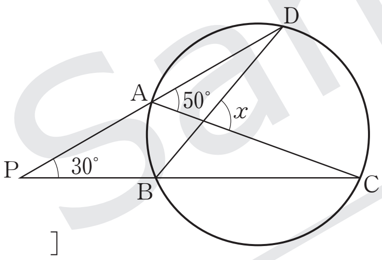
[　　　　　　　]

□②　BD は直径



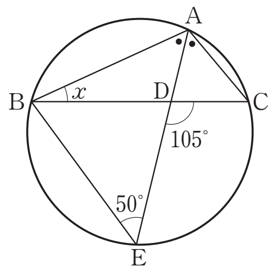
[　　　　　　　]

□③



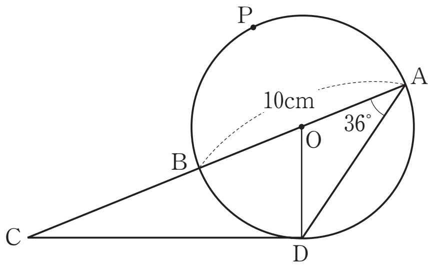
[　　　　　　　]

□④　AE は $\angle BAC$ を 2 等分



[　　　　　　　]

(2)　図で，線分 AB は円 O の直径で，線分 CD は点 D で O に接しています。



□①　$\angle C$ の大きさを求めなさい。

[　　　　　　　]

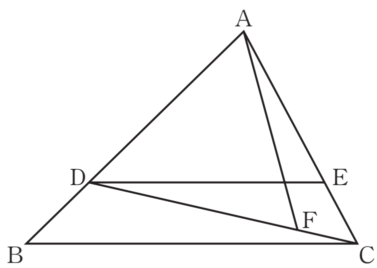
□②　$\overset{\frown}{BD}$ の長さを求めなさい。

[　　　　　　　]

□③　点 D を含まない側の $\overset{\frown}{AB}$ 上に点 P をとるとき，$\angle APD$ の大きさを求めなさい。

[　　　　　　　]

□(3)　右の図のように，$\triangle ABC$ の辺 AB 上に点 D，辺 AC 上に点 E があり，$DE /\!/ BC$ です。また，線分 CD 上に点 F があり，$\angle AFD=\angle ACB$ です。4 点 A，D，F，E は 1 つの円周上にあることを証明しなさい。

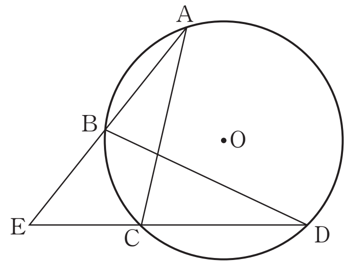


例題 4　円周角の利用

図のように，円 O の周上に 4 点 A，B，C，D があり，AB と DC の延長の交点を E とします。

⑴　△AEC∽△DEB を証明しなさい。

⑵　AE＝6cm，ED＝8cm で AB＝BE のとき，EC の長さを求めなさい。



解法

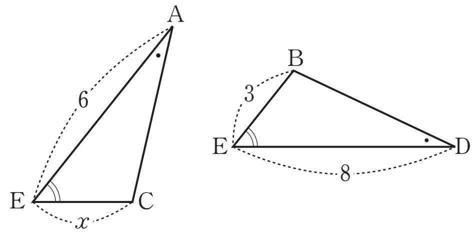
⑴　∠E が共通だから，もう 1 組等しい角をさがす。

答　［証明］△AEC と △DEB で，∠E は共通…①

$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角だから ∠EAC＝∠EDB…②

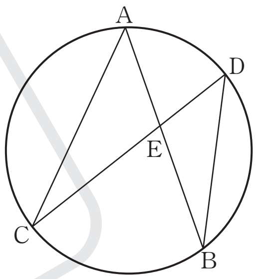
①，②より 2 組の角がそれぞれ等しいから，△AEC∽△DEB

⑵　右図より $x:3=6:8$，$x=\frac{9}{4}$　　**答**　$\frac{9}{4}$**cm**



4　次の問いに答えなさい。

⑴　図のように，同一円周上に 4 点 A，B，C，D があり，AB と CD の交点を E とします。

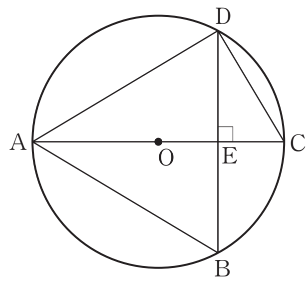


□①　△ACE∽△DBE を証明しなさい。

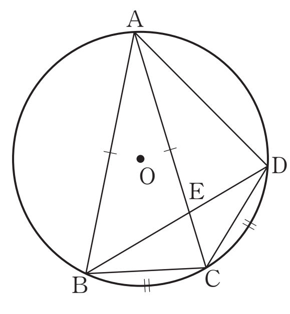
□②　AE＝4cm，CE＝6cm，DE＝3cm のとき，EB の長さを求めなさい。

［　　　　　　］

□⑵　図のように，円 O の周上に 4 点 A，B，C，D があり，直径 AC と弦 BD は垂直に交わり，その交点を E とします。△ACD∽△ABE を証明しなさい。



⑶　図のように，円 O の周上に 4 点 A，B，C，D があり，AB＝AC，$\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$ です。



□①　△ABE≡△ACD を証明しなさい。

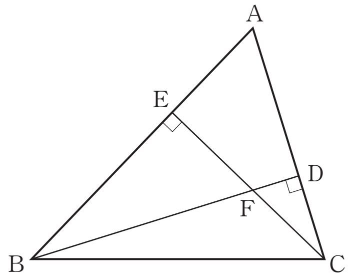
□②　AB＝4cm，BC＝2cm のとき，EC の長さを求めなさい。

［　　　　　　］

演　習　問　題

① 三角形の相似　次の問いに答えなさい。 ➡ 例題 1

(1)　図のような △ABC の，点 B，C から辺 AC，AB にそれぞれ垂線 BD，CE をひきます。



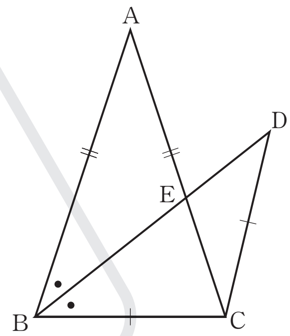
□①　相似な三角形を 2 組，対応する頂点の順に書きなさい。

[　　　　　　　　　　　　] [　　　　　　　　　　　　]

□②　AB＝12cm，AC＝9cm，AE＝4cm のとき，線分 AD の長さを求めなさい。

[　　　　　　　]

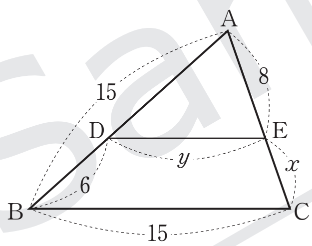
□(2)　図は，AB＝ACの二等辺三角形です。∠ABCの二等分線上にBC＝CDとなる点Dをとり，BD と AC の交点を E とします。△ABE∽△CDE を証明しなさい。



② 相似比の活用　次の問いに答えなさい。 ➡ 例題 2

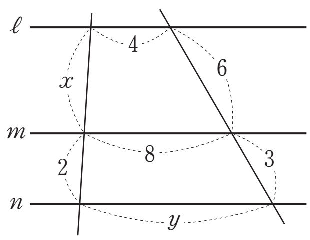
(1)　次の x，y の値を求めなさい。

□①　DE∥BC



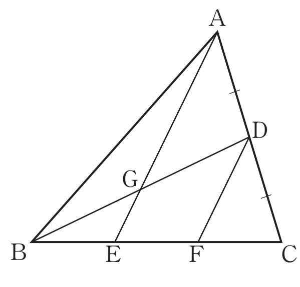
[　　　　　　　　　　　　]

□②　$\ell /\!/ m /\!/ n$



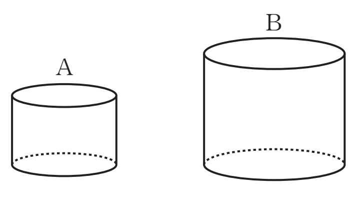
[　　　　　　　　　　　　]

□(2)　図の △ABC の辺 AC の中点 D と，辺 BC を 3 等分する点 E，F をとり，AEとBDの交点をGとします。DF＝6cmのとき，AGの長さを求めなさい。



[　　　　　　　]

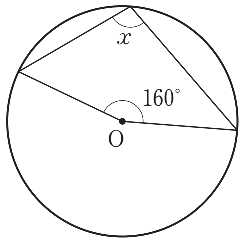
□(3)　図のような円柱の容器A, Bがあります。AとBの底面の半径の比は3：4でAの高さは10cm, Bの高さは16cmです。この容器に同じペンキを満たし，Aは6個セットで3000円，Bは2個セットで3000円で売られています。A，B どちらのセットが割安か説明しなさい。



③ 円周角の定理・円周角の定理の逆　次の問いに答えなさい。 例題 3

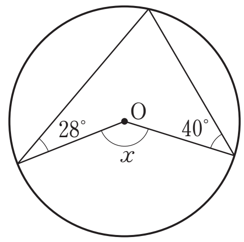
⑴　次の $\angle x$ の大きさを求めなさい。

□①



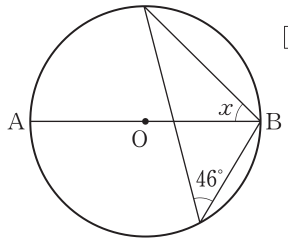
[　　　　　　　]

□②



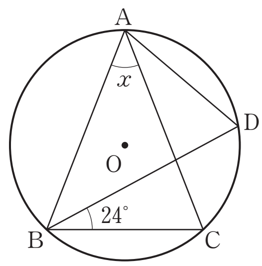
[　　　　　　　]

□③　AB は直径



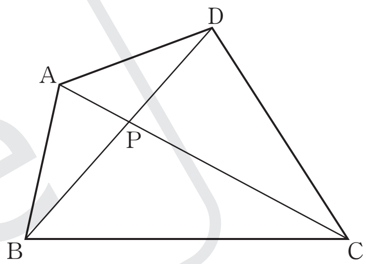
[　　　　　　　]

□④　AB＝AC，$\overset{\frown}{AD}:\overset{\frown}{DC}=$ 2：1



[　　　　　　　]

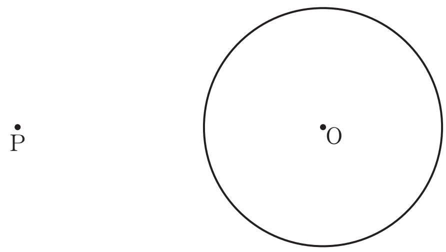
⑵　図のように，四角形 ABCD の対角線 AC と BD の交点を P とします。
$\angle$ABD＝$\angle$ACD のとき，△ADP∽△BCP となることを証明しなさい。



④ 円周角の利用　次の問いに答えなさい。 例題 4

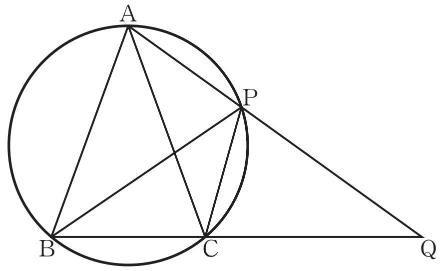
□⑴　図の直線 ℓ 上に，$\angle$APB＝90° となる点 P を作図しなさい。ただし点 P は 2 つあります。

□⑵　図の点 P を通る円 O の接線を作図しなさい。



⑶　図のように，3 点 A，B，C を通る円があり，AB＝AC＝5cm です。
$\overset{\frown}{AC}$ 上に点 P があり，直線 AP と BC の交点を Q とします。

□①　△ABP∽△AQB を証明しなさい。



□②　点 P が線分 AQ の中点になるとき，AP の長さを求めなさい。

[　　　　　　　]