

はじめに

本テキストは、皆さんが大学入試に通用する実戦力を養成できるように編集してあります。

単元ごとに、知識の確認のための重要事項とそれを定着させるための例題があり、さらに問題を解く力を確実にするために、演習問題Aと演習問題Bが段階を追って配列してあります。また、分からない問題がでてきたら、すぐに重要事項や例題に戻って、用語・公式・法則などを確認し、その使い方を見ることができます。

数学は暗記だけでは対応できない科目です。本テキストの学習を通じ、重要事項の利用法と正解へのプロセスを体得し、実力を確かなものにされることを願っています。

構成と活用法

本テキストは、次のように構成されています。

- ▶ **重要事項** 問題を解くにあたって必要とされる用語・公式・法則などがまとめてあります。
- ▶ **例題** 重要事項で得た知識を、実際に問題の中で使ってみることによって身につけます。
- ▶ **演習問題A** ここに集めてある問題は、演習問題Bに取り組む前にこれだけは押さえておきたいという、必要最低限のレベルです。解けた場合も、そうでない場合も、正解に至るまでの解法を必ず確認しましょう。
- ▶ **演習問題B** 標準から発展レベルの問題を収録してあります。重要事項・例題で学んだ知識・解法をどのように応用していけばよいかを考えながら、問題に向かうと効果的です。

❖ もくじ — 大学受験 α 数学I・A/II・B

1	2次関数	2
2	場合の数と確率	8
3	三角関数, 指数関数・対数関数	14
4	ベクトル	20

第 1 講

2 次関数

重要事項

1 2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) の解は、 $b^2-4ac \geq 0$ のとき

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

特に、 $ax^2+2bx+c=0$ の解は、 $x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}}{a}$

$ax^2+bx+c=0$ の2解を α, β ($\alpha < \beta$) とすると

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

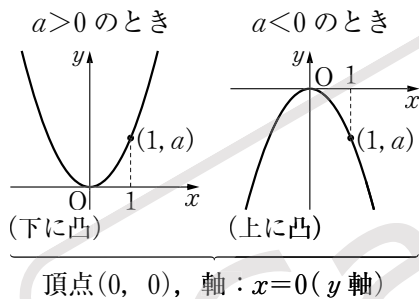
$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}, \quad \beta - \alpha = \frac{\sqrt{D}}{a} \quad (D = b^2 - 4ac)$$

が成り立つ。

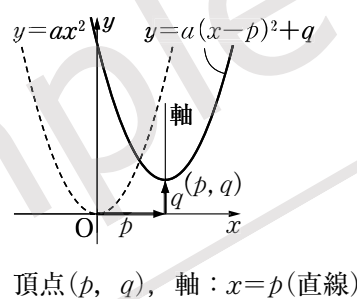
これらも公式として覚えておくとよい。

2 2次関数のグラフ

(1) $y=ax^2$ のグラフ



(2) $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ



3 2次方程式の解の判別

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c は実数) の b^2-4ac を判別式といい、 D で表す。

$$\left. \begin{array}{l} D > 0 \iff \text{異なる 2 つの実数解} \\ D = 0 \iff \text{重解 (実数解)} \\ D < 0 \iff \text{異なる 2 つの虚数解 (共役な 2 つの虚数解)} \end{array} \right\} \text{実数解} \iff D \geq 0$$

4 2次方程式の解の条件(解の分離)

$a > 0$, $f(x) = ax^2+bx+c$ として、2次方程式 $f(x) = 0$ について、

(1) 異なる2つの実数解をもち、2つの解がともに正

$$\iff D = b^2 - 4ac > 0, \quad -\frac{b}{2a} > 0, \quad f(0) = c > 0$$

(2) 異なる2つの実数解をもち、そのうち1つの解が正で他方が負

$$\iff f(0) = c < 0$$

例題 1

2 次関数 $f(x) = -x^2 + 4x + 3$ の $0 \leq x \leq a$ における最大値と最小値を求めよ。

解答:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 3 \\ &= -(x-2)^2 + 7 \end{aligned}$$

であるから、 $y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

$f(x)=3$ となる x の値は

$$-x^2 + 4x + 3 = 3$$

$$x(x-4) = 0$$

$$x=0 \text{ または } x=4$$

(i) $0 \leq a \leq 2$ のとき

$$\text{最大値 } f(a) = -a^2 + 4a + 3$$

$$\text{最小値 } f(0) = 3$$

(ii) $2 \leq a \leq 4$ のとき

$$\text{最大値 } f(2) = 7$$

$$\text{最小値 } f(0) = 3$$

(iii) $a \geq 4$ のとき

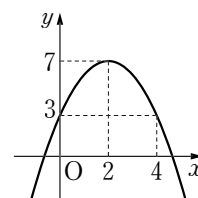
$$\text{最大値 } f(2) = 7$$

$$\text{最小値 } f(a) = -a^2 + 4a + 3$$

以上まとめると

$$\text{最大値 } \begin{cases} -a^2 + 4a + 3 & (0 \leq a \leq 2) \\ 7 & (a \geq 2) \end{cases}$$

$$\text{最小値 } \begin{cases} 3 & (0 \leq a \leq 4) \\ -a^2 + 4a + 3 & (a \geq 4) \end{cases}$$



例題 2

2 点 $(1, 1)$, $(-1, 5)$ を通り、頂点が直線 $y = -5x + 3$ 上にある放物線の式を求めよ。

解答:

頂点を (p, q) とすると、放物線の式は

$$y = a(x-p)^2 + q \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

← 放物線の式を設定する

とおける。

頂点が直線 $y = -5x + 3$ 上にあることから

$$q = -5p + 3$$

これを①に代入して

$$y = a(x-p)^2 - 5p + 3$$

← y を変数 x と定数 a, p で表す

2 点 $(1, 1)$, $(-1, 5)$ を通ることから

$$1 = a(1-p)^2 - 5p + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$5 = a(1+p)^2 - 5p + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

③ - ② より

$$4 = a\{(1+p)^2 - (1-p)^2\}$$

$$4 = 4ap$$

ゆえに、 $ap = 1$

$a = \frac{1}{p}$ ($p \neq 0$) を②に代入して

$$\frac{1}{p}(1-p)^2 - 5p + 3 = 1$$

← a を消去して p の 2 次方程式を作る

$$(1-p)^2 - 5p^2 + 2p = 0$$

$$-4p^2 + 1 = 0$$

$$p = \pm \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{1}{2} \text{ のとき, } a = 2, q = \frac{1}{2}$$

$$p = -\frac{1}{2} \text{ のとき, } a = -2, q = \frac{11}{2}$$

よって、求める放物線の式は

$$y = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}, \quad y = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{2}$$

例題 3

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 4x + a$ の共有点の個数を調べよ。

解答

$y = x^2$ と $y = 4x + a$ から y を消去して

$$x^2 = 4x + a$$

$$x^2 - 4x - a = 0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = 16 + 4a = 4(a + 4)$$

共有点の個数は、この 2 次方程式の実数解の個数と一致するので

$$D > 0 \text{ すなわち } a + 4 > 0 \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

$$D = 0 \text{ すなわち } a + 4 = 0 \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

$$D < 0 \text{ すなわち } a + 4 < 0 \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

よって、求める共有点の個数は

$$a > -4 \text{ のとき } 2 \text{ 個, } a = -4 \text{ のとき } 1 \text{ 個, } a < -4 \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

(別解 1)

$$f(x) = x^2 - 4x - a$$

とおき、 $f(x) = 0$ の実数解の個数を求めればよい。

$$f(x) = (x - 2)^2 - 4 - a$$

← 頂点の座標は $(2, -4 - a)$

頂点の y 座標が負 …… 実数解は 2 個

頂点の y 座標が 0 …… 実数解は 1 個

頂点の y 座標が正 …… 実数解は 0 個

であるから

$$a > -4 \text{ のとき } 2 \text{ 個, } a = -4 \text{ のとき } 1 \text{ 個, } a < -4 \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

(別解 2)

y を消去して変形すると

$$x^2 - 4x = a$$

よって、放物線 $y = x^2 - 4x$ と直線 $y = a$ の共有点の個数を調べればよい。

$$y = x^2 - 4x$$

$$= (x - 2)^2 - 4$$

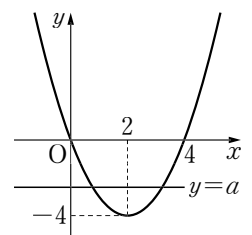
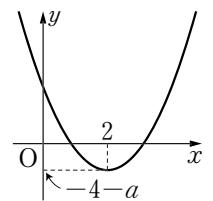
であるから、 $y = x^2 - 4x$ のグラフは右図のようになる。

直線 $y = a$ は x 軸に平行な直線であるから、右図により

$$a > -4 \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

$$a = -4 \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

$$a < -4 \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$



演習問題 A

1 2点(1, 0), (3, 0)を通り, 頂点が直線 $y=2x+1$ 上にある放物線の式を求めよ。

2 2次関数 $f(x)=ax^2-2ax+a+b$ の $-1 \leq x \leq 2$ における最大値が3, 最小値が-5であるとき, 定数 a, b の値を求めよ。

3 直線 $y=x+a$ と放物線 $y=x^2+2x-3$ の共有点の個数を調べよ。

4 2次関数 $y=x^2+2kx+k$ のグラフが直線 $y=-2$ よりつねに上方にあるように, 定数 k の値の範囲を定めよ。

5 x についての不等式

$$6x^2 - x - 1 > 0, \quad x^2 + (1-a)x - a < 0$$

を同時に満たす整数 x がちょうど 2 つ存在するように、定数 a の値の範囲を定めよ。

6 $x^2 + y^2 = 1$ のとき、 $y^2 - 2x$ の最大値と最小値を求めよ。

7 x の 2 次方程式 $x^2 - ax + a^2 - 9 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもち、その解が次の条件を満たすとき、定数 a の値の範囲をそれぞれ求めよ。

- (1) 異なる 2 つの正の解をもつ
- (2) 正負それぞれ 1 つずつの解をもつ

1 $x \geq 0, y \geq 0, x+y=4$ のとき、次の問いに答えよ。

- (1) $3x^2+2y^2$ の最大値と最小値を求めよ。
- (2) $(x-1)y$ の最大値と最小値を求めよ。

2 関数 $f(x)=x^2-10x+a$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $3 \leq x \leq 8$ における最大値が10となる時、 a の値を求めよ。
- (2) 区間 $a \leq x \leq a+1$ における $f(x)$ の最小値を $g(a)$ とするとき、 $g(a)$ を最小にする a の値と最小値を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

- (1) $y=|x^2-4x+3|$ のグラフをかけ。
- (2)
$$\begin{cases} y=|x^2-4x+3| \\ y=ax+1 \end{cases}$$

なる連立方程式が3つの相異なる実数解をもつときの a の値を求めよ。

4 2次方程式 $x^2-8ax+(8-8a)=0, 20x^2-12ax+5=0, 2x^2-6ax-9a=0$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 3つの方程式の中の少なくとも1つが虚数解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。
- (2) 3つの方程式の中の1つだけが虚数解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ。