第2講　数列の和といろいろな数列

ポイント 1　和の記号Σ

数列 $\{a_n\}$ の和 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ を，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ と書く。すなわち，$\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ は，k が 1，2，3，…，n と変化するときのすべての a_k の和を表す。

また，$\sum_{k=\ell}^{m} a_k$ は，数列 $\{a_n\}$ の第 ℓ 項から第 m 項までの和を表す。

チェック1　次の問いに答えよ。

(1)　次の和をΣを用いずに表せ。

(i)　$\sum_{k=1}^{5} \dfrac{2^k}{2k+1}$　　(ii)　$\sum_{i=3}^{6} (2i-3)(i+2)$

(2)　次の和をΣを用いて表せ。

(i)　$3+11+19+27+35+43+51$　　(ii)　$3^2+5^2+7^2+\cdots+(2n+3)^2$

ポイント 2　Σの公式や性質

累乗の和

(ア)　$\sum_{k=1}^{n} c=\underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{ 個の }c\text{ の和}}=nc$　（c は定数）

(イ)　$\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

(ウ)　$\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(エ)　$\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

Σと等比数列の和

$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$ であるから，$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$ は初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和を表しており，$r\fallingdotseq 1$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

Σの性質

(ア)　$\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k$　　(イ)　$\sum_{k=1}^{n} ca_k=c\sum_{k=1}^{n} a_k$　（c は定数）

チェック2　次の和を求めよ。

(1)(i)　$\sum_{k=1}^{10} 7$　　(ii)　$\sum_{k=1}^{19} k$　　(iii)　$\sum_{k=3}^{8} k^2$　　(iv)　$\sum_{k=1}^{11} k^3$

(2)(i)　$\sum_{k=1}^{n} 3\cdot(-2)^{k-1}$　　(ii)　$\sum_{k=1}^{n} \dfrac{7}{3^k}$

(3)(i)　$\sum_{k=1}^{n} (2k^3+3k^2-k+1)$　　(ii)　$\sum_{k=1}^{n} (k+2)(3k-1)$　　(iii)　$\sum_{k=1}^{n-1} (k^2-k+2)$　$(n\geqq 2)$

ポイント 3 数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

$n \geqq 2$ のとき

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n \quad \cdots\cdots①$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \quad \cdots\cdots②$$

①−②より

$S_n - S_{n-1} = a_n$

また，$S_1 = a_1$

以上より，初項から第 n 項までの和が S_n である数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1 = S_1 \\ n \geqq 2 \text{ のとき，} a_n = S_n - S_{n-1} \end{array}}$$

S_{n-1} が定義されるのは $n \geqq 2$ のときであるから，上記の式変形によって得られた式 $a_n = S_n - S_{n-1}$ が必ず成り立つのは $n \geqq 2$ のときに限られる。よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項を表すときは，この式に $n=1$ を代入したときの値が S_1 の値と一致するか調べる必要がある。

（ア） S_1 の値と一致する場合：1つの式で表す。

（イ） S_1 の値と一致しない場合：$n=1$ のときと $n \geqq 2$ のときに分けて表す。

チェック3　初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n = n^2 + 2n$　　(2) $S_n = n^2 + 2n - 1$

ポイント 4 群数列

1つの数列を順に数個ずつで区切った「群」に分けて考えたものを群数列といい，最初から n 番目の群を第 n 群という。数列を群に分けて群数列として考えると，法則が分かりにくい数列でも，各群の項が共通な性質をもち，規則性がはっきりとする場合がある。

下の例について，もとの数列を群数列として考え，整理することにより，以下の手順で規則性をはっきりさせ，計算方法をみつけることができる。

例　数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \cdots$ において，$\frac{7}{10}$ が第何項かを求める。

(i) 数列の項の特徴や性質に注目して，群に分ける。

分数の分母が等しい項をまとめた群に分ける。

$$1 \,\Big|\, \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \,\Big|\, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \,\Big|\, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \cdots$$

(ii) $\frac{7}{10}$ が第何群の何番目の項かを求める。

分母が10であるから，第10群の7番目の項である。

(iii) 第 k 群に含まれる項数を求める。

第 k 群，すなわち分母が k である項は k 個ある。

(iv) (ii)，(iii)で得られたことを利用する。

第1群から第9群の最後の項までの項数は $\sum_{k=1}^{9} k = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (9+1) = 45$ より，$\frac{7}{10}$ はもとの数列の $45+7=52$（番目）になるから，第52項である。

チェック4　下のように，2から順に偶数を並べて，第 n 群に n 個の項が含まれるように群に分ける。

$2 \mid 4, 6 \mid 8, 10, 12 \mid 14, \cdots$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 120は第何群の何番目に現れるか。　　(2) 120が含まれる群の項の和を求めよ。

例題 1 階差数列

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) 5，7，12，20，31，45，…　　(2) −6，−4，2，20，74，236，…

アプローチ

数列 $\{a_n\}$ の規則性がすぐにわからないときは，隣り合う 2 項の差をとってみると規則性が見出せることがある。$b_n=a_{n+1}-a_n$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ の階差数列という。

(1)の階差数列 $\{b_n\}$ は等差数列，(2)の階差数列 $\{b_n\}$ は等比数列であるから，階差数列 $\{b_n\}$ の一般項が求められる。このような場合，以下の手順で数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

(i) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める。

(ii) $n\geqq 2$ のとき

$$\boxed{a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k}$$

であることを用いて，a_n を n の式で表す。

(iii) b_{n-1} が定義されるのは $n\geqq 2$ のときであるから，(ii)の a_n の式が必ず成り立つのは $n\geqq 2$ のときに限られる。よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項を表すときは，この式に $n=1$ を代入したときの値 a_1 が数列の初項と一致するかを確認する。

（ア） a_1 の値と初項が一致する場合：1 つの式で表す。

（イ） a_1 の値と初項が一致しない場合：$n=1$ のときと $n\geqq 2$ のときに分けて表す。

解答

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。

(1) 階差数列 $\{b_n\}$ は

2，5，8，11，14，…

であり，初項 2，公差 3 の等差数列であるから，その一般項は

$$b_n=2+(n-1)\cdot 3=3n-1$$

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=5+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-1)$$

$$=5+3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$$

$$=\frac{3}{2}n^2-\frac{5}{2}n+6$$

$a_n=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{5}{2}n+6$ は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=\frac{3}{2}n^2-\frac{5}{2}n+6$$

(2) 階差数列 $\{b_n\}$ は

2，6，18，54，162，…

であり，初項 2，公比 3 の等比数列であるから，その一般項は

$$b_n=2\cdot 3^{n-1}$$

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=-6+\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot 3^{k-1}$$

$$=-6+\frac{2(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$=3^{n-1}-7$$

$a_n=3^{n-1}-7$ は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n=3^{n-1}-7$$

類題 1　次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) −8，−4，4，16，32，52，…　　(2) 19，21，19，13，3，−11，…

(3) 7，5，9，1，17，−15，…　　(4) −1，7，11，13，14，$\dfrac{29}{2}$，…

例題 2 項が消える数列の和

次の和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}$　　(2) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+2)}$

アプローチ

数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_k=b_{k+1}-b_k$ のような階差の形に変形できれば

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+(b_4-b_3)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)$$
$$=(b_2+b_3+b_4+\cdots+b_{n+1})-(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)=b_{n+1}-b_1$$

となり，$b_2+b_3+b_4+\cdots+b_n$ の部分を消去することができるので，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ が求められる。

(1) $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ ……①より，$\dfrac{1}{k}=b_k$ とすると b_k-b_{k+1} と表せるので，各項を①のように分解することで項が消える。

(2) $\dfrac{1}{k(k+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+2}\right)$ ……②より，$\dfrac{1}{k}=b_k$ とすると $\dfrac{1}{2}(b_k-b_{k+2})$ と表せるので，各項を②のように分解することで項が消える。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(b_k-b_{k+2})$ を計算すると $\dfrac{1}{2}(b_1+b_2-b_{n+1}-b_{n+2})$ より最初と最後の 2 項ずつが残る。

解答

(1)
$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}$$
$$=\frac{k+1}{k(k+1)}-\frac{k}{k(k+1)}$$
$$=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

であるから

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\quad \cdots,$$
$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

よって

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

(2)
$$\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(k+2)-k}{k(k+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

であるから

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right),\quad \frac{1}{2\cdot 4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right),\quad \cdots,$$
$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

よって

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+2)}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

類題 2　次の和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{5\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 8}+\cdots+\dfrac{1}{(n+4)(n+5)}$　　(2) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(3) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 7}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+3)}$　　(4) $\dfrac{1}{1\cdot 7}+\dfrac{1}{4\cdot 10}+\dfrac{1}{7\cdot 13}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+4)}$

演　習　問　題

パート 1 (p.8, 9)

1 次の和を求めよ。　**⇒ポイント2**

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(2k+1)(k+1)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(n-k)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2^k+1)(2^k-1)$　　(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)$

2 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。　**⇒ポイント2**

(1) $4\cdot1,\ 5\cdot3,\ 6\cdot5,\ 7\cdot7,\ 8\cdot9,\ \cdots$

(2) $1\cdot(n+1),\ 2\cdot(n+2),\ 3\cdot(n+3),\ 4\cdot(n+4),\ 5\cdot(n+5),\ \cdots$

3 初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　**⇒ポイント3**

(1) $S_n=2-2^{n+1}$　　(2) $S_n=(2n-1)\cdot3^n$

4 次のように，初項 1，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列を第 n 群に n 個の項が含まれるように群に分ける。

$$1 \;\Big|\; \frac{1}{3},\ \frac{1}{9} \;\Big|\; \frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \frac{1}{243} \;\Big|\; \frac{1}{729},\ \cdots$$

このとき，次の問いに答えよ。　**⇒ポイント4**

(1) $\dfrac{1}{3^{30}}$ は第何群の何番目に現れるか。

(2) $\dfrac{1}{3^{30}}$ が含まれる群の項の和を求めよ。ただし，累乗は計算しなくてよい。

5 数列 1，1，2，1，2，3，1，2，3，4，1，2，3，4，5，1，2，…について，次の問いに答えよ。

⇒ポイント4

(1) 20回目に 3 が現れるのは第何項か。

(2) 初項から20回目に現れる 3 までの項の和を求めよ。

6 右図のように，自然数を

　1 段目には 1 から始めて 1 個，
　2 段目には 2 から始めて 3 個，
　3 段目には 5 から始めて 5 個，
　…

と順に書き並べていく。

次の問いに答えよ。　**⇒ポイント4**

1 段：　　　　1
2 段：　　　2　3　4
3 段：　　5　6　7　8　9
4 段：　10　11　12　13　14　15　16
5 段：17　18　…

(1) k 段目にある自然数の個数を k を用いて表せ。

(2) 109は何段目の左から何番目の自然数か。

パート 2 (p.10，11)

7 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　⇒**例題 1**

(1)　$-7,\ -4,\ 2,\ 11,\ 23,\ 38,\ \cdots$　　(2)　$1,\ 2,\ \dfrac{5}{2},\ \dfrac{11}{4},\ \dfrac{23}{8},\ \dfrac{47}{16},\ \cdots$

8 数列 $1,\ 8,\ 10,\ 10,\ 11,\ 16,\ 28,\ \cdots$ を $\{a_n\}$ とする。次の問いに答えよ。　⇒**例題 1**

(1)　$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$，$\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とする。$\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

9 次の和を求めよ。　⇒**例題 2**

(1)　$\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}+\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}+\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}+\cdots+\dfrac{1}{2n(2n+1)}$

(2)　$\dfrac{1}{3\cdot7}+\dfrac{1}{5\cdot9}+\dfrac{1}{7\cdot11}+\cdots+\dfrac{1}{(2n+1)(2n+5)}$

10 次の問いに答えよ。　⇒**例題 2**

(1)　$k(k+1)(k+2)=\dfrac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$　……① を用いて

$$S=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)$$

を求めよ。

(2)　$\dfrac{k}{(k+1)!}=\dfrac{1}{k!}-\dfrac{1}{(k+1)!}$　……② を用いて

$$S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$$

を求めよ。

11 次の和を求めよ。　⇒**例題 2**

(1)　$\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$

(2)　$\dfrac{8}{1^2\cdot3^2}+\dfrac{16}{3^2\cdot5^2}+\dfrac{24}{5^2\cdot7^2}+\cdots+\dfrac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

(3)　$\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

パート 3

12 二項定理 $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$ を利用して，次の問いに答えよ。

(1)　$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ。　(2)　$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k$ を求めよ。　(3)　$\sum_{k=0}^{n}\dfrac{{}_n\mathrm{C}_k}{3^k}$ を求めよ。

(4)　$k(k-1)\cdot{}_n\mathrm{C}_k=n(n-1)\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2}\ (2\leqq k\leqq n)$ が成り立つことを示し，$\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\cdot{}_n\mathrm{C}_k$ を求めよ。

13 3 直線 $y=2x$，$y=-x+33$，y 軸で囲まれた図形(境界線を含む)にある格子(こうし)点の個数を求めよ。ただし，格子点とは，x 座標，y 座標とも整数である点のことである。