はじめに

本テキストは，皆さんが無理なく基本をマスターし，かつ応用力を養成できるように編集してあります。

単元ごとに，知識の確認のための基本事項とそれを定着させるための例題があり，さらに問題を解く力を確実にするために，演習問題Ａと演習問題Ｂが段階を追って配列してあります。また，分からない問題がでてきたら，すぐに基本事項や例題に戻って，新出の用語・公式・法則などを確認し，その使い方を見ることができます。

数学は暗記だけでは対応できない科目です。本テキストの学習を通じ，基本事項の利用法と正解へのプロセスを体得し，実力を確かなものにされることを願っています。

構成と活用法

本テキストは，次のように構成されています。

▶基本事項　問題を解くにあたって必要とされる用語・公式・法則などがまとめてあります。

▶例　　題　基本事項で得た知識を，実際に問題の中で使ってみることによって身につけます。

▶演習問題A　ここに集めてある問題は，演習問題Ｂに取り組む前にこれだけは押さえておきたいという，必要最低限のレベルです。解けた場合も，そうでない場合も，正解に至るまでの解法を必ず確認しましょう。

▶演習問題B　標準から発展レベルの問題を収録してあります。基本事項・例題で学んだ知識・解法をどのように応用していけばよいかを考えながら，問題に向かうと効果的です。

もくじ —— 数学B

第 1 講　数列 (1)

基本事項

1 等差数列

数列 $\{a_n\}$ において，各項に一定の数 d を加えると次の項が得られるとき，この数列を等差数列といい，d を公差という。

すなわち，すべての自然数 n について，$a_{n+1}=a_n+d$ が成り立つ数列 $\{a_n\}$ が等差数列で，初項を a とすれば

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \cdots$$

$$+d \qquad +d \qquad +d$$

であり，初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ について，次のことがいえる。

(1)　一般項は，$a_n=a+(n-1)d$

(2)　初項から第 n 項までの和を S_n とし，第 n 項を l とすれば，$l=a+(n-1)d$ であり

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

2 等比数列

数列 $\{a_n\}$ において，各項に一定の数 r をかけると次の項が得られるとき，この数列を等比数列といい，r を公比という。

すなわち，すべての自然数 n について，$a_{n+1}=ra_n$ が成り立つ数列 $\{a_n\}$ が等比数列で，初項を a とすれば，

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \cdots$$

$$\times r \quad \times r \quad \times r$$

であり，初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ について，次のことがいえる。

(1)　一般項は，$a_n=ar^{n-1}$

(2)　初項から第 n 項までの和を S_n とすれば

$r\neq 1$ のとき，$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r=1$ のとき，$S_n=na$

3 和の公式

(i)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{個の}c\text{の和}}=nc$　（c は定数）

(ii)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(iii)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iv)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(v)　$r\neq 1$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}r^k=\frac{r(1-r^n)}{1-r}$　（初項 r，公比 r，項数 n の等比数列の和）

4 階差数列

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う 2 つの項の差

$b_n=a_{n+1}-a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

を項とする数列 $\{b_n\}$ を，数列 $\{a_n\}$ の階差数列という。

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1}$$

$$b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad \cdots \quad b_{n-1} \quad b_n$$

5 階差数列と一般項

数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とすると，$n \geqq 2$のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

6 等差数列・等比数列の性質

(1) 3つの数a，b，cがこの順に等差数列であるとき

$$2b = a + c$$

(2) 0でない3つの数a，b，cがこの順に等比数列であるとき

$$b^2 = ac$$

例題 1

(1) 第10項が19，第13項が25である等差数列$\{a_n\}$がある。$\{a_n\}$の一般項と第n項までの和S_nを求めよ。

(2) 初項が3，第4項が−24である等比数列$\{b_n\}$がある。$\{b_n\}$の一般項と第n項までの和S_nを求めよ。

解答

(1) この数列の初項をa，公差をdとすると

$a_{10} = 19$であるから　$a + 9d = 19$　　←$a_n = a + (n-1)d$

$a_{13} = 25$であるから　$a + 12d = 25$

これを解いて　$a = 1$，$d = 2$

よって，一般項は　$a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$

次に，和の公式により

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n = \frac{1 + 2n - 1}{2} \times n = n^2$$

《注》 この結果，すなわち

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

は，$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{1}{2} n(n+1)$

とあわせて覚えておくとよい。

(2) この数列の公比をrとすると，初項が3より

$$3r^3 = -24$$　　←$b_n = 3r^{n-1}$

$$r^3 = -8$$

rは実数だから，$r = -2$

よって，一般項は　$b_n = 3(-2)^{n-1}$

次に，和の公式により

$$S_n = \frac{3\{1 - (-2)^n\}}{1 - (-2)} = 1 - (-2)^n$$

例題 2

次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (k^2 - 2k + 2)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+3)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

解答

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-2k+2)=\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n$$

$$=\frac{n}{6}\{2n^2+3n+1-6(n+1)+12\}$$

$$=\frac{n}{6}(2n^2-3n+7)$$

←$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=nc$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+3)=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)}{6}(2n+1+9)$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+5)$$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

←恒等式 $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$ を利用する

例題 3

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

3, 5, 9, 15, 23, 33, …

解答

この数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

2, 4, 6, 8, 10, …

となり，これは初項 2，公差 2 の等差数列である。

3, 5, 9, 15, 23, 33, …

2　4　6　8　10

よって，$b_n=2+(n-1)\cdot 2=2n$

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$

←階差数列の公式

$$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

$$=3+2\sum_{k=1}^{n-1}k$$

←$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

$$=3+2\cdot\frac{(n-1)n}{2}$$

$$=n^2-n+3$$

また，初項は $a_1=3$ なので，これは $n=1$ のときにも成り立つ。

以上により，一般項は，$a_n=n^2-n+3$

演習問題 A

1 数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列とする。$\{a_n\}$ の初項から第85項までの和を求めよ。

2 初項が77，公差が -3 である等差数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 項の値がはじめて負になるのは第何項か。

(3) 初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

3 $a_4=24$，$a_7=192$ である等比数列 $\{a_n\}$ を考える。このとき，初項と公比を求めよ。また，初項から第10項までの和を求めよ。

4 x，12，y がこの順で等比数列になっており，68，y，x がこの順で等差数列になっている。$0<x<y$ のとき，x，y の値を求めよ。

5 $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{49\cdot51}$ を求めよ。

6 数列 3，33，333，3333，33333，…の一般項 a_n と，初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

7 $\displaystyle\sum_{k=1}^{11}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ を計算せよ。

8 次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を以下の手順で求めよ。

1，2，4，10，23，46，82，134，…

(1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。b_1，b_2，b_3，b_4，b_5 を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の階差数列は等差数列である。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) (2)の結果を用いて，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

演習問題B

1 初項 a，公比 r がともに実数の等比数列について，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_3=31$，$S_6=3906$ であった。このとき a，r の値を求めよ。

2 初項 a，公差17の等差数列 a，$a+17$，$a+34$，$a+51$，…を考え，初項 a は 0 以上の整数とする。この等差数列において，値が1000以下の項の和を $S(a)$ とするとき，$S(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ。

3 異なる正の数 a，b，c について $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{2}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ がこの順で等比数列をなすとき，b^2 を a，c を用いて表せ。さらに，a，b，$3c$ がこの順で等差数列をなすとき，$\dfrac{a}{c}$ の値を求めよ。

4 $\{a_n\}$ を初項が 1，公差が 2 の等差数列，$\{b_n\}$ を初項が 1，公比が -1 の等比数列とする。数列 $\{c_n\}$ を $c_n=a_nb_n$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) c_1，c_2，c_3，c_4，c_5 を求めよ。

(2) 数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

5 数列 $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$，…，$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$，…において，初項から第 8 項までの和を求めよ。また，初項から第 n 項までの和が14となるときの n の値を求めよ。