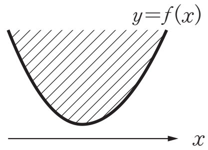
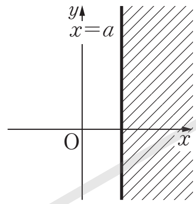
第3講　不等式の表す領域

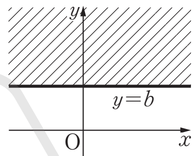
ポイント 1 直線や曲線を境界とする領域

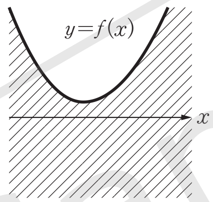
一般に，x，y についての関係を表す不等式が与えられたとき，それを満たす座標平面上の点$(x,\ y)$全体の集合を，その不等式の表す領域という。

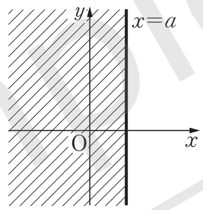
境界線が曲線 $y=f(x)$（直線 $y=ax+b$ を含む）で表されるとき，および，境界線が座標軸に平行な直線であるとき，不等号の向きと領域はそれぞれ次のように対応する。

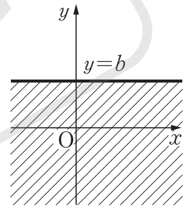
<table>
<tr><td>境界線</td><td>曲線 $y=f(x)$</td><td>直線 $x=a$</td><td>直線 $y=b$</td></tr>
<tr><td>不等号の向き</td><td>$y>f(x)$</td><td>$x>a$</td><td>$y>b$</td></tr>
<tr><td>不等式の表す領域</td><td>

曲線 $y=f(x)$ の上側</td><td>

直線 $x=a$ の右側</td><td>

直線 $y=b$ の上側</td></tr>
<tr><td>不等号の向き</td><td>$y<f(x)$</td><td>$x<a$</td><td>$y<b$</td></tr>
<tr><td>不等式の表す領域</td><td>

曲線 $y=f(x)$ の下側</td><td>

直線 $x=a$ の左側</td><td>

直線 $y=b$ の下側</td></tr>
</table>

また，等号の有無と領域は次のように対応する。

　不等式に等号が含まれないとき，領域は境界線を含まない

　不等式に等号が含まれるとき，領域は境界線を含む

一般に，不等式の表す領域を図示する問題では，次の手順で進めるとよい。

(i)　境界線となる直線または曲線について，特徴的な点（切片，頂点など）の座標を求めてからグラフをかく。

(ii)　不等式の向きに対応する領域を斜線などで示す。

(iii)　境界線を含むか含まないかを記す。

チェック1　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y>3x+1$　　(2)　$y\leqq -2x+4$

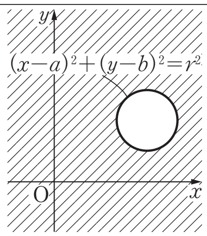
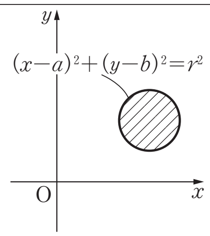
(3)　$3x+2y+6<0$　　(4)　$x-4y-8\leqq 0$

(5)　$x>-3$　　(6)　$y\leqq 2$

(7)　$y>4x^2$　　(8)　$2x^2-y-8\geqq 0$

◆ポイント 2 円を境界とする領域

境界線が円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ で表されるとき，不等号の向きと領域は次のように対応する。

不等号の向き	$(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$	$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$
不等式の表す領域	 円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の外部	 円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ の内部

また，等号の有無と領域の対応は，**ポイント1**と同様に，次のようになる。

　不等式に等号が含まれないとき，領域は境界線を含まない

　不等式に等号が含まれるとき，領域は境界線を含む

チェック2　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$x^2+y^2>4$

(2)　$x^2+y^2\leqq 36$

(3)　$(x-3)^2+(y+2)^2<16$

(4)　$x^2+(y-1)^2\geqq 1$

(5)　$x^2+y^2-4x-10y+7>0$

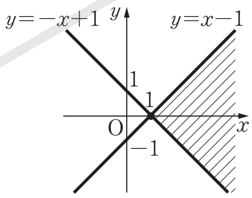
(6)　$x^2+y^2+6x-8y\leqq 0$

◆ポイント 3 連立不等式の表す領域

連立不等式の表す領域は，それぞれの不等式の表す領域の共通部分である。

図示する際は，２つの境界線の交点の座標を求めてからグラフをかくとよい。

例　連立不等式 $\begin{cases} y<x-1 \\ y>-x+1 \end{cases}$ の表す領域は



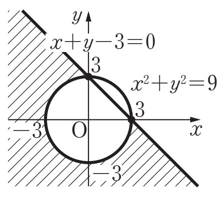
　直線 $y=x-1$ の下側

　直線 $y=-x+1$ の上側

の共通部分であり，右の図の斜線部分である。

　ただし，境界線を含まない。

例　連立不等式 $\begin{cases} x^2+y^2\geqq 9 \\ x+y-3\leqq 0 \end{cases}$ について



$x+y-3\leqq 0$ より，$y\leqq -x+3$

よって，連立不等式の表す領域は

　円 $x^2+y^2=9$ の外部および周

　直線 $y=-x+3$ およびその下側

の共通部分であり，右の図の斜線部分である。

　ただし，境界線を含む。

３つ以上の不等式からなる連立不等式についても，それぞれの式が表す領域の共通部分をとればよい。

チェック3　次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$\begin{cases} y>2x+7 \\ y>x+5 \end{cases}$

(2)　$\begin{cases} x-2y-8\leqq 0 \\ x+3y-3\leqq 0 \end{cases}$

(3)　$\begin{cases} y>x^2-1 \\ y<x+1 \end{cases}$

(4)　$\begin{cases} x^2+y^2\leqq 25 \\ x-2y+5\geqq 0 \end{cases}$

例題 1 積の形の不等式の表す領域

不等式 $(x+y-5)(2x-y-1)>0$ の表す領域を図示せよ。

アプローチ

不等式の性質として，次のことが成り立つ。

$$AB>0 \Longleftrightarrow \begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} A<0 \\ B<0 \end{cases}$$

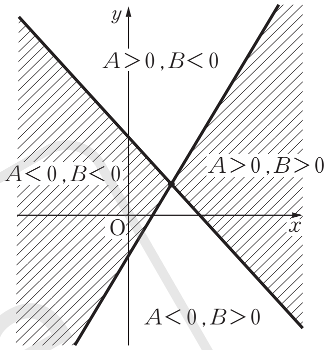
したがって，$A=x+y-5$，$B=2x-y-1$ として，与えられた不等式を連立不等式で表し，それぞれの連立不等式の表す領域を**ポイント3**に従って求めてから，その和集合を示せばよい。

なお，不等号が他の種類の不等式についても同様に考える。それぞれ，次のように対応する。

$$AB<0 \Longleftrightarrow \begin{cases} A>0 \\ B<0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} A<0 \\ B>0 \end{cases}$$

$$AB \geqq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} A \geqq 0 \\ B \geqq 0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} A \leqq 0 \\ B \leqq 0 \end{cases}$$

$$AB \leqq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} A \geqq 0 \\ B \leqq 0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} A \leqq 0 \\ B \geqq 0 \end{cases}$$



(補足)

領域を図示した後に，以下のことを確認するとよい。

本問の場合

(i) 隣り合う領域の，一方が求める領域，もう一方が求める領域外になっているか。

(ii) 領域内の1点を不等式に代入したとき，不等式が成り立っているか。

(i)については，今回のように，隣り合う領域で，A，B いずれかの符号だけが異なるときは，AB の符号も異なることからいえる。

(ii)については，例えば $x=y=0$ のとき，与式の左辺の値は5であり，不等式が成り立つから，原点Oが求める領域に含まれることが確認できる。

解答

与えられた不等式が成り立つことは

$$\begin{cases} x+y-5>0 \\ 2x-y-1>0 \end{cases} \text{または} \begin{cases} x+y-5<0 \\ 2x-y-1<0 \end{cases}$$

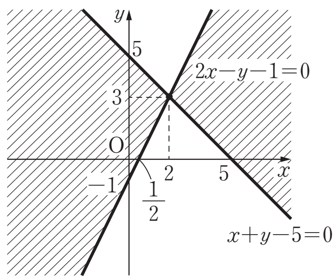
すなわち

$$\begin{cases} y>-x+5 \\ y<2x-1 \end{cases} \cdots\cdots① \quad \text{または} \quad \begin{cases} y<-x+5 \\ y>2x-1 \end{cases} \cdots\cdots②$$

が成り立つことと同値である。

よって，求める領域は，①，②の表す領域の和集合であり，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含まない。



類題 1 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $(x+y-3)(3x-y-1)>0$

(2) $(x+y-4)(x-2y-1) \geqq 0$

(3) $(2x-y-5)(x+3y-6)<0$

(4) $(2x-y-4)(x+2y+3) \leqq 0$

例題 2 線形計画法

連立不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq 5$，$3x+y \leqq 9$ の表す領域を D とする。次の問いに答えよ。

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$2x-y$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値を求めよ。

アプローチ

連立1次不等式を満たすような変数に対して，ある1次式が最大･最小となるような変数の値を求める方法を線形計画法という。これは，連立1次不等式を満たす領域と(1次式)$=k$ とおいた直線の共有点を調べることで求められる。

$2x-y=k$ とおくと，領域 D 上の点 $(X,\ Y)$ と k について次のことがいえる。

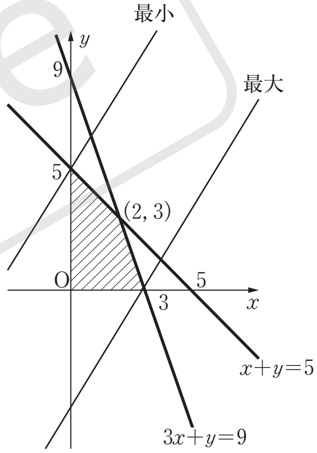
$2X-Y=k \iff$ 点 $(X,\ Y)$ は直線 $2x-y=k$ 上にある

$\iff$ 点 $(X,\ Y)$ は領域 D と直線 $2x-y=k$ の共有点である

$y=2x-k$ は，k を定数とみなすと傾きが 2，y 切片が $-k$ の直線であるから，この直線が領域 D と共有点をもつように k を変化させるとき，直線の傾きは一定で y 切片 $-k$ が変化する。y 切片の変化する範囲から，k の最大値と最小値を求めればよい。

解答

(1) 領域 D は，4つの直線 $x=0$，$y=0$，$y=-x+5$，$y=-3x+9$ で囲まれた四角形の内部および周であり，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



(2) $2x-y=k$ とおくと，$y=2x-k$ ……㊍

これは，傾きが 2，y 切片が $-k$ の直線を表す。

直線㊍が領域 D と共有点をもつときの k の最大値と最小値を求めればよい。

したがって，右図より，

k が最大になる($-k$ が最小になる)のは，直線㊍が2直線 $y=0$，$y=-3x+9$ の交点 $(3,\ 0)$ を通るときであり，

k が最小になる($-k$ が最大になる)のは，直線㊍が2直線 $x=0$，$y=-x+5$ の交点 $(0,\ 5)$ を通るときである。

よって，$2x-y$ は

$x=3$，$y=0$ のとき，最大値 $2 \cdot 3-0=6$

$x=0$，$y=5$ のとき，最小値 $2 \cdot 0-5=-5$

をとる。

類題 2 連立不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$x+y \leqq 8$，$x-2y \leqq 2$ の表す領域を D とする。次の問いに答えよ。

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x-y$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値を求めよ。

演　習　問　題

パート ❶ (p.14，15)

1 次の不等式の表す領域を図示せよ。　**⇒ポイント1**

(1) $y<-3x+5$

(2) $y\geqq 2x-6$

(3) $x-4y-8<0$

(4) $2x+3y-9\leqq 0$

(5) $x\leqq -4$

(6) $y>0$

(7) $x^2+2y-4<0$

(8) $y\geqq 2x^2-8x+5$

2 次の不等式の表す領域を図示せよ。　**⇒ポイント2**

(1) $x^2+y^2\geqq 81$

(2) $x^2+y^2<64$

(3) $(x-3)^2+(y-6)^2>4$

(4) $(x+1)^2+(y-5)^2\leqq 25$

(5) $x^2+y^2-4x+2y-4>0$

(6) $x^2+y^2+8x\geqq 0$

3 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。　**⇒ポイント3**

(1) $\begin{cases} 5x-2y+8\leqq 0 \\ 2x+y+3\leqq 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y>x+6 \\ y<x^2 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-2y+4\leqq 0 \\ x^2+y^2\leqq 16 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x^2+y^2<4 \\ x^2+y^2>1 \end{cases}$

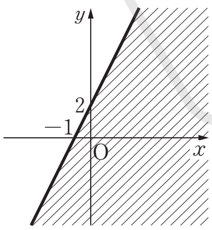
(5) $\begin{cases} y>x \\ y>-x+4 \\ y<3x+4 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} 2x+y\geqq 0 \\ x+2y\leqq 0 \\ x+2y+6\geqq 0 \end{cases}$

4 次の図の斜線部分の領域は，どのような不等式で表されるか。ただし，境界線を含まないものとする。

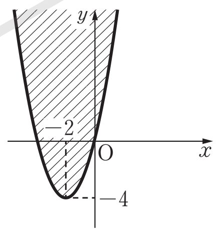
⇒ポイント1・2

(1)



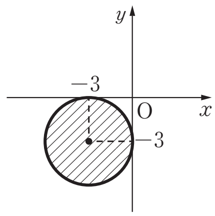
(境界線は直線)

(2)



(境界線は放物線)

(3)



(境界線は円)

5 3点A(−3，−1)，B(−2，6)，C(6，2)を頂点とする△ABCがある。次の問いに答えよ。

⇒ポイント3

(1) 直線AB，BC，CAの方程式をそれぞれ求めよ。

(2) △ABCの内部は，どのような不等式で表される領域か。

パート ❷ (p.16, 17)

6 次の不等式の表す領域を図示せよ。　**⇒例題１**

(1)　$(3x+y)(x+2y-10)>0$　　(2)　$(y-4)(4x-y-8)\geqq 0$

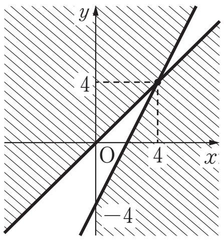
(3)　$(x^2+2y)(2x+2y+3)<0$　　(4)　$(3x-4y)(x^2+y^2-25)\leqq 0$

(5)　$x^2-y^2-3x+y+2>0$　　(6)　$x^3-x^2y-xy+y^2\leqq 0$

7 次の図の斜線部分の領域は，どのような不等式で表されるか。ただし，境界線を含まないものとする。

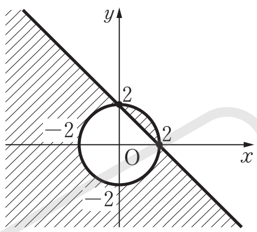
⇒例題１

(1)



(境界線は直線)

(2)



(境界線は円と直線)

8 連立不等式 $x+y\leqq 5$，$2x-y\geqq 1$，$x-2y\leqq 8$ の表す領域を D とする。次の問いに答えよ。　**⇒例題２**

(1)　領域 D を図示せよ。

(2)　点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとき，$x+2y$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値を求めよ。

9 実数 x，y が，$x^2+y^2\leqq 4$ を満たしながら変化するとき，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ。　**⇒例題２**

10 ある工場では，２種類の材料A，Bを使って，２種類の商品X，Yを製造している。商品X，Yを１個製造するのに必要な材料A，Bの量と，商品X，Yの１個あたりの値段は，下の表の通りである。

今，材料Aの在庫が40kg，材料Bの在庫が60kgある。この在庫を使って商品X，Yを製造し，そのすべてが売れるとするとき，商品の売り上げを最大にするためには，商品X，Yをそれぞれ何個製造すればよいか。　**⇒例題２**

	材料A(kg)	材料B(kg)	値段(万円)
商品X	2	2	5
商品Y	1	3	4

パート ❸

11 ３点O(0，0)，A(3，1)，B(1，3)を頂点とする△OABの内接円の中心Ｉの座標を求めよ。

12 x，y は実数とする。次の命題が成り立つことを証明せよ。

(1)　$x^2+y^2<1 \Longrightarrow x+y<\sqrt{2}$　　(2)　$x^2+y^2<9 \Longrightarrow x^2+y^2>10x-25$