第1講　場合の数

ポイント 1 場合の数の基本

　ある事柄において，起こり得るすべての場合を数え上げるとき，その総数を場合の数という。条件を満たすものをすべて書き並べようとするとき，もれがないこと，重複がないことの両方が満たされていなければならない。そのために有効な方法として，

　① 辞書式の順序による数え上げ
　② 樹形図

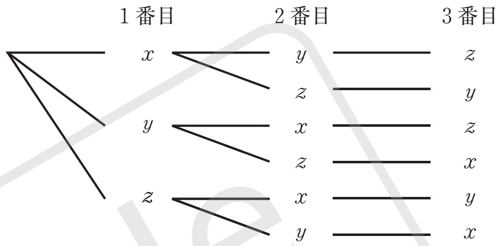
の２つがある。

例　x，y，z の３文字から作られる文字列が何通りあるかを調べる。

① 辞書式の順序による数え上げ

xyz，xzy，yxz，yzx，zxy，zyx

② 樹形図



　いずれの方法においても，６通りと求められる。

チェック１　次の問いについて，(1)，(2)は小さい数から順にすべて書き並べることによって，(3)は樹形図をかくことによって答えよ。

(1) 1，3，5，7 の４個の数字から異なる３個を使って作られる３けたの整数は全部でいくつあるか。

(2) 1，2，3，4，5 の５個の数字から異なる２個を使って作られる２けたの整数は全部でいくつあるか。

(3) 百円硬貨が２枚，五十円硬貨が４枚，十円硬貨が10枚ある。これらを用いて200円を支払う方法は何通りあるか。

ポイント 2 和の法則・積の法則

和の法則

　２つの事柄 A と B は同時には起こらないとする。A の起こり方が m 通り，B の起こり方が n 通りあるとき，A または B が起こる場合の数は $m+n$ 通りである。

積の法則

　２つの事柄 A，B について，A の起こり方が m 通り，そのそれぞれに対して B の起こり方が n 通りずつあるとき，A と B がともに起こる場合の数は mn 通りである。

　和の法則，積の法則は，３つ以上の事柄についても同様に成り立つ。

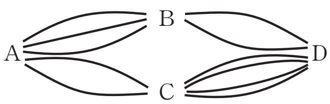
チェック２　次の問いに答えよ。

(1) 大小２個のさいころを投げるとき，目の和が３の倍数となるのは何通りあるか。

(2) １から４までの整数が１つずつ書かれた４枚のカードから１枚ずつ続けて２回ひくとき，１回目にひいたカードの数から２回目にひいたカードの数をひいた差が自然数となるのは何通りあるか。

(3) $(a+b+c+d+e)(x+y+z)$ を展開するとき，いくつの項が現れるか。

(4) 右の図のように，AからBへは３本の道が，AからCへは２本の道が，BからDへは２本の道が，CからDへは４本の道がある。このとき，BかCを通って，AからDに行く経路は何通りあるか。



ポイント3 順列

いくつかのものを順序をつけて１列に並べたものを順列という。

異なる n 個のものから r 個を取り出して作る順列の総数を ${}_n\mathrm{P}_r$ と表す。

$${}_n\mathrm{P}_r=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ 個の自然数の積}} \quad (r\leqq n)$$

また，${}_n\mathrm{P}_0=1$ と定める。

特に，$r=n$ のとき，すなわち異なる n 個のものすべてを並べる順列の総数は

$${}_n\mathrm{P}_n=n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1$$

この式の右辺を n の階乗といい，$n!$ と表す。また，$0!=1$ と定める。

また，$0<r<n$ のとき，${}_n\mathrm{P}_r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

特定のいくつかが隣り合う順列

特定のいくつかをまとめて１組にして，全体の並べ方を考え，次に特定のものの中での並べ方を考える。

円順列

異なるいくつかのものを円形に並べたものを円順列という。

一般に，異なる n 個のものの円順列の総数は　$\dfrac{{}_n\mathrm{P}_n}{n}=(n-1)!$

重複順列

異なるいくつかのものから，同じものを繰り返し使うことを許して並べたものを重複順列という。

一般に，異なる n 個のものから全部で r 個を取って並べる重複順列の総数は n^r（$r>n$ であってもよい）

チェック３　次の問いに答えよ。

(1) A，B，C，D，E，F の６人のうち４人が１列に並ぶ並び方は何通りあるか。

(2) 男子３人，女子４人が１列に並ぶとき，男子３人が続いて並ぶ並び方は何通りあるか。

(3) ５人のグループが円形のテーブルのまわりに座るとき，並び方は何通りあるか。

(4) 1，2，3 の３個の数字を重複を許して使ってできる５けたの整数は全部でいくつあるか。

ポイント4 組合せ

いくつかのものを順序を考慮せずに取る取り出し方を組合せという。

異なる n 個のものから r 個を取る組合せの総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ と表す。

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (r\leqq n)$$

（分母･分子とも r 個の自然数の積）

また，${}_n\mathrm{C}_0=1$ と定める。

${}_n\mathrm{C}_r$ に関する公式

① n 個のものからどの r 個を取り出すのか決めることと，どの $n-r$ 個を残すのかを決めることは同じことであるから，${}_n\mathrm{C}_{n-r}={}_n\mathrm{C}_r$　（ただし，$0\leqq r\leqq n$）

② n 個のものから r 個を取り出すとき，特定の１個を含んで全体から r 個を取り出す方法は，${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ 通り，同じ特定の１個を含まずに全体から r 個を取り出す方法は，${}_{n-1}\mathrm{C}_r$ 通りある。

よって，${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$　（ただし，$n\geqq2$，$1\leqq r\leqq n-1$）

チェック４　次の問いに答えよ。

(1) ８つのチームで総当たり戦を行うと総試合数は何試合となるか。

(2) 12色のペンから９色のペンを選ぶ方法は何通りあるか。

(3) 男子６人，女子５人の中から男子３人，女子３人を選ぶ方法は何通りあるか。

例題 1 組分けと組やものの区別

4 個の球を 3 つの箱に分けて入れる。次の方法で入れるとき，入れ方はそれぞれ何通りあるか。

(1) 球を 1 個も入れない箱があってもよいものとして，球も箱も区別しない。

(2) 球を 1 個も入れない箱があってもよいものとして，球のみ区別する。

(3) 球を 1 個も入れない箱があってもよいものとして，球も箱も区別する。

(4) どの箱にも球を少なくとも 1 個は入れるものとして，球も箱も区別する。

アプローチ

組分けの問題では，組やものを区別するかしないかを見極めて方針を立てることが大切である。(1)(2)のように区別しない場合をもとに区別する場合を考えるなど，誘導の形になっていることが多い。

(1) 3 つの箱に入れる球の個数の組合せを問われている。同じ組合せが重複しないように規則的に数え上げる。

(3) どの球をどの箱に入れるかを問われている。場合分けでも求められるが計算が大変なので，重複順列の考え方を用いるのが効率よく求められる。

(4) (3)の場合の数の余事象として，球を 1 個も入れない箱がある場合の数を考える。

解答

(1) 3 つの箱に入れる球の個数が a 個，b 個，c 個であるとき，これを $\{a, b, c\}$ と表すことにする。

求める総数は，$\{4, 0, 0\}$，$\{3, 1, 0\}$，$\{2, 2, 0\}$，$\{2, 1, 1\}$ の 4 通り。

(2) (1)の組合せそれぞれについて，どの球を入れるかを考える。

(i) $\{4, 0, 0\}$ のとき

4 個の球すべてを 1 つの箱に入れる入れ方であるから，1 通り。

(ii) $\{3, 1, 0\}$ のとき

1 個の球を入れる箱にどの球を入れるかが決まれば，もう 1 つの箱に入れる 3 個の球も決まるので，

$${}_4C_1=4\text{(通り)}$$

(iii) $\{2, 2, 0\}$ のとき

いったん箱を区別して，箱A，箱Bに 2 個ずつ入れるとすると，${}_4C_2\times{}_2C_2$ 通り。

実際には箱の区別はないので，箱の区別をなくすと，同じ分け方が 2! 通りずつできるから

$$\frac{{}_4C_2\times{}_2C_2}{2!}=3\text{(通り)}$$

(iv) $\{2, 1, 1\}$ のとき

2 個の球を入れる箱にどの球を入れるかが決まれば，残りの 2 個の球は残りの 2 つの箱に 1 個ずつ入れることになるので

$${}_4C_2=6\text{(通り)}$$

(i)〜(iv)より，$1+4+3+6=14$(通り)

(3) 3 つの箱をA，B，Cとする。4 個の球それぞれについて，入れる箱はA，B，Cのどれかであるから，その選び方は 3 通りずつある。

よって，求める総数は，3 個から 4 個取る重複順列の総数であるから

$$3^4=81\text{(通り)}$$

(4) (3)の結果から，1 つの箱にだけ球が入っている場合の数と 2 つの箱にだけ球が入っている場合の数をひけばよい。

(i) 1 つの箱にだけ球が入っているとき

Aにだけ球を入れる入れ方は 1 通り。

B，Cにだけ球を入れる場合も同様だから

$$1\times3=3\text{(通り)}$$

(ii) 2 つの箱にだけ球が入っているとき

AとBにだけ球を入れる場合，4 個の球それぞれについて，箱の選び方は 2 通りずつある。

2 個から 4 個取る重複順列の総数は

$$2^4=16\text{(通り)}$$

この中には 4 個の球をすべてAにだけ入れた場合とBにだけ入れた場合の 2 通りが含まれているから，これらを除いて

$$16-2=14\text{(通り)}$$

AとC，BとCにだけ球を入れる場合も同様だから

$$14\times3=42\text{(通り)}$$

(i)，(ii)より

$$81-(3+42)=36\text{(通り)}$$

類題 1 5 個の球を 3 つの箱に分けて入れるとき，例題 1 で示した(1)〜(4)の入れ方はそれぞれ何通りあるか。

例題 2 同じものを含む順列

1，1，2，2，3，4 の 6 個の数字を用いて，次のように整数を作るとき，整数はいくつできるか。

(1)　6 けたの整数　　　　(2)　6 けたの偶数

(3)　4 個の数字を選んでできる 4 けたの整数

アプローチ

一般に，n 個のもののうち p 個が同じもの，残りのうち q 個が同じもの，さらに残りのうち r 個が同じもの，…のとき，これらすべてを 1 列に並べる順列の総数は

$${}_n\mathrm{C}_p\times{}_{n-p}\mathrm{C}_q\times{}_{n-p-q}\mathrm{C}_r\times\cdots=\frac{n!}{p!q!r!\cdots}\quad (ただし，p+q+r+\cdots=n)$$

(1)　6 個の数字は 1 と 2 が 2 個ずつ，3 と 4 が 1 個ずつである。このことを上の公式に当てはめて計算する。

(2)　制限のある一の位の数字から考える。6 個の数字のうち，一の位に入るのは偶数なので 2 と 4 の 2 種類があるから，場合分けをして考える。

(3)　同じ数字を何個取り出すかの組合せに注目する。4 個の数字の組合せは，

(i)　4 個すべての数字が異なる場合(例：1234)

(ii)　2 個の数字が同じで残り 2 個の数字が異なる場合(例：1123)

(iii)　2 個の同じ数字が 2 組ある場合(例：1122)

があるから，場合分けをして考える。

解答

(1)　$\dfrac{6!}{2!2!1!1!}=180$(個)

(別解)　${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1=180$(個)

(2)　一の位の数字は 2 か 4 でなければならない。

(i)　一の位の数字が 2 のとき

残り 5 個の数字は 1 が 2 個，2 と 3 と 4 が 1 個ずつであるから，

$$\frac{5!}{2!1!1!1!}=60(個)$$

(ii)　一の位の数字が 4 のとき

残り 5 個の数字は 1 と 2 が 2 個ずつ，3 が 1 個であるから，

$$\frac{5!}{2!2!1!}=30(個)$$

(i)，(ii)より

$60+30=90$(個)

(別解)　(i)　${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=60$(個)

(ii)　${}_5\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=30$(個)

(3)(i)　4 個すべての数字が異なるとき

1，2，3，4 の 4 個の数字すべてを並べる順列であるから

$4!=24$(個)

(ii)　2 個の数字が同じで残り 2 個の数字が異なるとき

2 個の同じ数字は 1，2 の 2 通りがあり，そのそれぞれに対して，残り 2 個の数字の選び方は，2 個の同じ数字で選んだもの以外の 3 種類から 2 種類選ぶので ${}_3\mathrm{C}_2$ 通り。

さらにそれらのそれぞれに対して，順列は $\dfrac{4!}{2!1!1!}$ 通りなので

$$2\times{}_3\mathrm{C}_2\times\frac{4!}{2!1!1!}=72(個)$$

(iii)　2 個の同じ数字が 2 組あるとき

1 と 2 を 2 個ずつ並べる順列であるから

$$\frac{4!}{2!2!}=6(個)$$

(i)，(ii)，(iii)より

$24+72+6=102$(個)

(別解)　(ii)　$2\times{}_3\mathrm{C}_2\times({}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1)=72$(個)

(iii)　${}_4\mathrm{C}_2=6$(個)

類題 2　1，1，2，2，3 の 5 個の数字を用いて，次のように整数を作るとき，整数はいくつできるか。

(1)　5 けたの整数　　　　(2)　5 けたの奇数

(3)　3 個の数字を選んでできる 3 けたの整数

演　習　問　題

パート 1 (p.2, 3)

1 A, Bの2人がゲームをして，どちらかが3勝したところでゲームを終了する。引き分けは考えないとき，勝敗のつき方は何通りあるか。　**⇒ポイント1**

2 360の正の約数は全部でいくつあるか。　**⇒ポイント2**

3 0，1，2，3，4，5の6個の数字から異なる4個を用いて次のような整数を作るとき，整数はいくつできるか。　**⇒ポイント3**

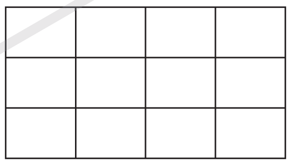
(1)　4けたの整数　　(2)　4けたの偶数

4 次の問いに答えよ。　**⇒ポイント4**

(1)　正九角形の頂点のうち3点を頂点とする三角形はいくつあるか。

(2)　正十五角形の対角線は何本引けるか。

(3)　右の図のように，横の平行線が4本と，縦の平行線が5本でつくられた図形がある。この図形の中に四角形は全部でいくつあるか。



5 袋の中に，赤玉，白玉，青玉がたくさん入っている。この袋から8個の玉を取り出すとき，玉の取り出し方の組合せは何通りあるか。

パート 2 (p.4, 5)

6 12人を次のように分ける分け方は，それぞれ何通りあるか。　**⇒例題1**

(1)　3人ずつのA組，B組，C組，D組に分ける。　(2)　3人ずつの4組に分ける。

(3)　3人，4人，5人の3組に分ける。　(4)　3人，3人，6人の3組に分ける。

7 7人の生徒が部屋に入るとき，次のように入る方法は何通りあるか。　**⇒例題1**

(1)　1人も入らない部屋があってもよいものとして，2つの部屋A，Bに入る。

(2)　どの部屋にも少なくとも1人は入るものとして，2つの部屋A，Bに入る。

(3)　どの部屋にも少なくとも1人は入るものとして，3つの部屋A，B，Cに入る。

8 6個の球を3つの箱に分けて入れる。次の方法で入れるとき，入れ方はそれぞれ何通りあるか。⇒**例題1**

(1) 球を1個も入れない箱があってもよいものとして，球も箱も区別しない。

(2) どの箱にも球を少なくとも1個は入れるものとして，球も箱も区別しない。

(3) 球を1個も入れない箱があってもよいものとして，球のみ区別する。

(4) どの箱にも球を少なくとも1個は入れるものとして，球のみ区別する。

(5) 球を1個も入れない箱があってもよいものとして，箱のみ区別する。

(6) どの箱にも球を少なくとも1個は入れるものとして，箱のみ区別する。

(7) 球を1個も入れない箱があってもよいものとして，球も箱も区別する。

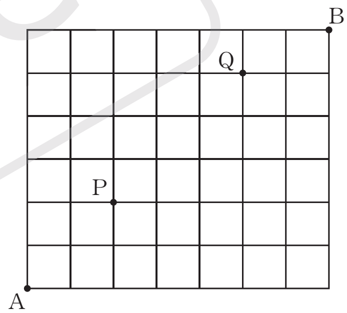
(8) どの箱にも球を少なくとも1個は入れるものとして，球も箱も区別する。

9 1，1，1，2，2，3，3，4の8個の数字を用いて，次のように整数を作るとき，整数はいくつできるか。⇒**例題2**

(1) 8けたの整数　　(2) 8けたの奇数

(3) 4個の数字を選んでできる4けたの整数

10 右の図のような街路でAからBまで最短距離で行く経路について，次の問いに答えよ。　⇒**例題2**



(1) すべての経路は何通りあるか。

(2) Pを通って行く経路は何通りあるか。

(3) Qを通らずに行く経路は何通りあるか。

(4) PまたはQの少なくとも一方を通る経路は何通りあるか。

パート 3

11 0，1，2，3，4，5の6個の数字を1個ずつ用いて，6けたの整数を作るとき，次の問いに答えよ。

(1) できる6けたの整数のうち，432105は小さい方から何番目の数か。

(2) できる6けたの整数のうち，小さい方から300番目の数はいくつか。

12 次のとき，$x+y+z=10$ を満たす整数 x，y，z の組はそれぞれいくつあるか。

(1) x，y，z が負でない整数のとき　　(2) x，y，z が自然数のとき