第1講　多項式の計算

ポイント1　多項式の展開

分配法則

$a(b+c)=ab+ac$　　$(a+b)c=ac+bc$

乗法公式

(1)　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(2)　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(3)　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(4)　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(5)　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

(6)　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

やや複雑な式の展開では，共通する部分を(　)でまとめるなどすると，計算しやすくなることがある。

例　$(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

わかりにくければ，$a+b=X$ のようなおきかえをしてから計算してもよい。

チェック1　次の式を展開せよ。

(1)　$3b^2(4a-7b)$

(2)　$(a+2b)(3c-4d)$

(3)　$(x-2)(x^2+3x-5)$

(4)　$(p+8)^2$

(5)　$(7x-4y)^2$

(6)　$\left(9m-\frac{5}{8}n\right)\left(9m+\frac{5}{8}n\right)$

(7)　$(a+6)(a-15)$

(8)　$(3x-2)(4x+3)$

(9)　$(a+2b-c)^2$

(10)　$(2a-3b+4c)^2$

ポイント2　因数分解

共通因数のくくり出し

$ab+ac=a(b+c)$

因数分解の公式(乗法公式の逆)

(1)　$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(2)　$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(3)　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(4)　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

因数分解では，それ以上進められなくなるまで，共通因数でくくり出したり公式を使ったりする。

チェック2　次の式を因数分解せよ。

(1)　$12x^2-32xy$

(2)　$30a^6bc^4-36a^3b^2c+6a^3b$

(3)　$t^2-20t+100$

(4)　$1-144k^2$

(5)　$r^2-15r+56$

(6)　$x^2+13xy-30y^2$

(7)　$2x^5-50x^3$

(8)　$-18a^3bc^2+48a^2b^2c^2-32ab^3c^2$

ポイント 3 たすきがけによる因数分解

因数分解の公式(乗法公式の逆)

(5)　$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

実際の計算では，次のようにして a，b，c，d の値を判断すると考えやすい。このような因数分解の手法を，たすきがけの方法ということがある。

$$
\begin{array}{ccccc}
a & \diagdown\!\!\!\diagup & b & \cdots\cdots & bc \\
c & & d & \cdots\cdots & \underline{\quad ad \quad} \\
 & & & & bc+ad \quad \leftarrow x\text{の係数} \\
\uparrow & & \uparrow & & \\
\text{積}\,ac\,\text{が} & & \text{積}\,bd\,\text{が} & & \\
x^2\,\text{の係数} & & \text{定数項の数} & &
\end{array}
$$

例　$2x^2+5x-12$ の因数分解

①　x^2の係数 2 から，公式の a と c にあたる数を求める。x^2の項においては，$a>0$ の場合だけ考えても差し支えない。かけて 2 になる 2 つの整数は 1 と 2 なので，

$(a,\ c)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

ここでは $a=1$，$c=2$ とする。

②　定数項-12 から，公式の b と d にあたる数の候補を洗い出す。かけて12になる 2 つの整数は 1 と12，2 と 6，3 と 4 で，定数項の符号が負なので，それぞれどちらかが正でどちらかが負である。すなわち，

$(b,\ d)=(1,\ -12),\ (-1,\ 12),\ (2,\ -6),\ (-2,\ 6),\ (3,\ -4),\ (-3,\ 4)$

③　x の係数 5 から，公式の b と d にあたる数を求める。具体的には，たすきがけの方法を用いて，②で洗い出した数の候補の中から，$bc+ad=5$ になる数の組を見つける。下のように，$b=4$，$d=-3$ として考えたときに，$bc+ad=4\cdot2+1\cdot(-3)=5$ となり，うまくいく。

$$
\begin{array}{ccccl}
1 & \diagdown\!\!\!\diagup & 4 & \cdots\cdots & 8 \quad \leftarrow bc=4\cdot2=8 \\
2 & & -3 & \cdots\cdots & \underline{-3} \quad \leftarrow ad=1\cdot(-3)=-3 \\
\uparrow & & \uparrow & & 5 \quad \leftarrow bc+ad=8-3=5\,(x\text{の係数}) \\
x^2\,\text{の係数} & & \text{定数項} & & \\
ac=1\cdot2=2 & & bd=4\cdot(-3)=-12 & &
\end{array}
$$

よって，$a=1$，$b=4$，$c=2$，$d=-3$ で，

$2x^2+5x-12=(x+4)(2x-3)$

$px^2+qxy+ry^2$（p，q，r は定数）の形をした式の因数分解では，y も定数と見なして解けばよい。上の公式(5)で，$b=b'y$，$d=d'y$とすると

$acx^2+(ad'+b'c)xy+b'd'y^2=(ax+b'y)(cx+d'y)$

となる（y を無視して因数分解し，各因数の定数項に y を伴わせてもよい）。

例　$2x^2+5xy-12y^2=(x+4y)(2x-3y)$

この例で，係数の並びは上の例と同じである。

チェック 3　次の式を因数分解せよ。

(1)(i)　$2x^2+5x+3$　　(ii)　$3x^2-4x-7$

(iii)　$3x^2-10x+3$　　(iv)　$2x^2-9x-5$

(2)(i)　$2x^2+7xy+6y^2$　　(ii)　$3x^2+2xy-8y^2$

(iii)　$6x^2-19xy+10y^2$　　(iv)　$12x^2-8xy-15y^2$

(3)(i)　$3a^2+(4b+1)a+(b+1)(b-2)$　　(ii)　$2a^2-(b+1)a-b^2-2b-1$

例題 1 複2次式の因数分解

次の式を因数分解せよ。

(1) x^4-13x^2+36　　(2) x^4-4x^2+36

アプローチ

ax^4+cx^2+e のように，x^2の多項式(xの指数がすべて偶数である式)を，x の複 2 次式という。

複 2 次式は，

x^2についての式として因数分解する方法

$(x^2+p)^2-(qx)^2$ の形を作る方法

のいずれかで因数分解する。

(1) $x^4=(x^2)^2$ とみると，与式は$(x^2)^2-13x^2+36$ となるから，公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ を使うことができる。その因数がさらに公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ で因数分解できる場合があるので，それを見落とさないように注意する。

(2) 公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ を使うことができない。

この場合，x^2の項を適当な差の式に分けて表し，式全体が$(x^2+p)^2-(qx)^2$ の形になるようにする。すると，公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を使うことができる。

x^2の項をどのような差の式に分ければよいかは，次のように判断する。

① (2)で，定数項は36なので，$(x^2+p)^2$ の部分は$(x^2+6)^2$ か$(x^2-6)^2$ のどちらかである。よって，与式は $x^4+12x^2+36-16x^2$，$x^4-12x^2+36-(-8x^2)$のどちらかに変形することになる。

② $(qx)^2=q^2x^2$ であるから，ひいた式のx^2の係数は，正でなければならない。(平方数であれば，q が整数となり好ましい) $16x^2$と$-8x^2$のうち，係数が正なのは$16x^2$である。よって，与式は $x^4+12x^2+36-16x^2$ と変形すればよいとわかる。

なお，公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ を使って解けるものの中には，$(x^2+p)^2-(qx)^2$の形を作り，(2)の方法で解けるものもある。例えば，**例題 1** (1)はそのような問題であるが，これらの問題は，公式 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$ を使った方が，計算が簡単であることが多い。

解答

(1) $x^4-13x^2+36=(x^2)^2-13x^2+36$

$=(x^2-4)(x^2-9)$　←x^2 を 1 つの文字のように扱って因数分解

$=(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$

(別解)

$x^4-13x^2+36=x^4-12x^2+36-x^2$

$=(x^2-6)^2-x^2$

$=\{(x^2-6)+x\}\{(x^2-6)-x\}$　←公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$を利用

$=(x^2+x-6)(x^2-x-6)$

$=(x-2)(x+3)(x+2)(x-3)$

※ 最初の式変形を $x^4+12x^2+36-25x^2$ として同様に計算してもよい。

(2) $x^4-4x^2+36=x^4+12x^2+36-16x^2$

$=(x^2+6)^2-(4x)^2$

$=\{(x^2+6)+4x\}\{(x^2+6)-4x\}$　←公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$を利用

$=(x^2+4x+6)(x^2-4x+6)$

類題 1 次の式を因数分解せよ。

(1) x^4-10x^2+9　　(2) $x^4-20x^2y^2+64y^4$

(3) $9x^4-40x^2+16$　　(4) x^4+2x^2+9

(5) x^4+64y^4　　(6) $9x^4-x^2+16$

例題 2　複数の文字の因数分解

$x^2y+xy^2+xz+x+yz+y$ を因数分解せよ。

アプローチ

複数の文字が含まれる式で，公式やたすきがけが使えないような因数分解では，まず，

①　特定の文字について整理する方法

②　次数ごとに分けて因数分解する方法

のいずれかで対処する。すると，(　)の中がさらに因数分解できる式になったり(　)自体が共通因数になったりして，その後の解き進め方が予測しやすい。

①　特定の文字について整理する方法

１つの文字に注目して，その文字を共通因数として，部分的に次数ごとにくくり出す。なるべく次数の最も低い文字で整理すると，その後どう対処していけばよいかが見つかりやすい。

$x^2y+xy^2+xz+x+yz+y$

x については２次　$y\underline{x^2}+(y^2+z+1)\underline{x}+(yz+y)$

y については２次　$x\underline{y^2}+(x^2+z+1)\underline{y}+(xz+x)$

z については１次　$(x+y)\underline{z}+(x^2y+xy^2+x+y)$

②　次数ごとに分けて因数分解する方法

項の次数が同じものを１つの(　)にまとめる。別の次数の項は別の(　)にまとめる。

$$\underset{3\text{次}}{\underline{(x^2y+xy^2)}}+\underset{2\text{次}}{\underline{(xz+yz)}}+\underset{1\text{次}}{\underline{(x+y)}}$$

解答

①　特定の文字について整理する方法

xは２次，y は２次，z は１次で，次数の最も低い文字は z だから，z に着目して整理する。

$x^2y+xy^2+xz+x+yz+y$

$=(x+y)z+(x^2y+xy^2+x+y)$　←z について１次の項と０次の項を分ける

$=(x+y)z+\{xy(x+y)+(x+y)\}$

$=(x+y)z+(x+y)(xy+1)$　←各次数の項をそれぞれ因数分解

$=(x+y)\{z+(xy+1)\}$　←共通因数 $x+y$ でくくる

$=(x+y)(xy+z+1)$

②　次数ごとに分けて因数分解する方法

３次の項，２次の項，１次の項に分ける。

$x^2y+xy^2+xz+x+yz+y$

$=(x^2y+xy^2)+(xz+yz)+(x+y)$

$=xy(x+y)+z(x+y)+(x+y)$　←各次数の項をそれぞれ因数分解

$=(x+y)(xy+z+1)$

類題 2　次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2y+x^2z-xy^2-y^2z$

(2)　$x^2+y^2-2yz+2zx-2xy$

(3)　$x^2y+x^2-xy^2-xyz-xz+y^2z$

(4)　$2ab^2-4b^2c-2bc^2+abc+8b+4c$

(5)　$a^2-ab-2b^2-a-4b-2$

(6)　$x^2-32y^2-8z^2+4xy+32yz-2zx$

演　習　問　題

パート 1 (p.2, 3)

1 次の式を展開せよ。　**⇒ポイント1**

(1) $(9m^2-5n)\times 4n^3$

(2) $(2a-3)(4b+5)$

(3) $(x^2-4xy-6y^2)(2x-3y)$

(4) $(x^3-2x^2-3)(2x^2+4x-3)$

(5) $(2a-3b)^2$

(6) $(4x-y-3)^2$

(7) $(3x-2)(3x+7)$

(8) $\left(\frac{1}{2}x-1\right)\left(\frac{1}{2}x-5\right)$

(9) $(r-2)(r+2)(r^2+4)$

(10) $(a+b)^2(a-b)^2$

(11) $(s-5)(s-7)-3s(s-4)$

(12) $(2x-3y)(6x-y)-3(2x-y)^2$

2 次の式を展開せよ。　**⇒ポイント1**

(1) $(a+b)(a+b-8)$

(2) $(2y-z)(4x-2y+z)$

(3) $(x-2y+3)(x-2y-3)$

(4) $(2a+3b-5c)(2a-3b+5c)$

(5) $(x+3y+4)(x+3y-6)$

(6) $(x-y+3)(2x-2y-7)$

3 次の式を因数分解せよ。　**⇒ポイント2**

(1) $36a^4b^2c-60a^3b^3c$

(2) $25x^2+30x+9$

(3) $4p^2-225$

(4) $m^2+25mn-54n^2$

(5) $9y^2-81x^2y^2$

(6) $3k^2-36k+96$

(7) $(x+3)(x-5)-9$

(8) $(b-4)(b-16)+4b$

4 次の式を因数分解せよ。　**⇒ポイント2**

(1) $a(b-3)-2(b-3)$

(2) $x(x-y)+4y(y-x)$

(3) $(n^2-6)(n-2)-n(2-n)$

(4) $(a+b)^2-2(a+b)$

(5) $(x-2y)^2-4(x-2y)+4$

(6) $(a+5)^2+3(a+5)-40$

(7) $(x+3y)^2-25$

(8) $(a-c)^2-(b-c)^2$

5 次の式を因数分解せよ。　**⇒ポイント3**

(1) $2x^2-5x+2$

(2) $12a^2+7ab-12b^2$

(3) $6x^2y-23xy+20y$

(4) $-8x^2-8xy+6y^2$

(5) $3(x+y)^2-11(x+y)+6$

(6) $6(x-1)^2-7(x-1)-5$

(7) $4x^2-3(y+1)x-y^2-2y-1$

(8) $2a^2-(b-2c)a-6b^2+24bc-24c^2$

パート 2 (p.4, 5)

6 次の式を因数分解せよ。 **⇒例題 1**

(1) x^4+12x^2+35

(2) x^4+10x^2+16

(3) x^4+10x^2+25

(4) x^4-18x^2+81

(5) x^4-4x^2-45

(6) x^4-5x^2+4

(7) $2x^4-7x^2-4$

(8) $4x^4-13x^2+9$

7 次の式を因数分解せよ。 **⇒例題 1**

(1) x^4+9x^2+25

(2) x^4-14x^2+25

(3) x^4-13x^2+4

(4) x^4+x^2+1

(5) $2x^4+8$

(6) $4x^4-16x^2+9$

8 次の式を因数分解せよ。 **⇒例題 2**

(1) $a^3+a^2c-ab^2-b^2c$

(2) $x^2y-xz-xy^2+yz$

(3) $x^2-2xy+4xz+4z^2-4yz$

(4) $6a^2-5c^2-3ab+bc+13ac$

(5) $ab^3-b^2-ac^3+c^2+ab^2c-abc^2$

(6) $4x^3z+4x^2y-4x^2yz-4xy^2+xy^2z+y^3$

(7) $a^2b+a^2+abc+ab^2+ab+ac+b^2c+bc$

(8) $x^2z-x^2+xz^2-xyz+xy-xz-yz^2+yz$

9 次の式を因数分解せよ。 **⇒例題 2**

(1) $yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)+2xyz$

(2) $a^2(b-c)+b^2(c+a)-c^2(a+b)$

(3) $-a(b-c)^2+b(c-a)^2-c(a-b)^2$

(4) $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$

パート 3

10 次の式を展開せよ。

(1) $(x-4)(x-1)(x+2)(x+5)$

(2) $(a+b+c)(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)$

11 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^4-x^2+12x-36$

(2) $4x^4-5x^2+8x-15$

(3) $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)-72$

(4) $(x+1)(x+2)(x-6)(x-12)-30x^2$