

はじめに

本テキストは、皆さんが無理なく基本をマスターし、かつ応用力を養成できるように編集してあります。

単元ごとに、知識の確認のための基本事項とそれを定着させるための例題があり、さらに問題を解く力を確実にするために、演習問題Aと演習問題Bが段階を追って配列してあります。また、分からない問題がでてきたら、すぐに基本事項や例題に戻って、新出の用語・公式・法則などを確認し、その使い方を見ることができます。

数学は暗記だけでは対応できない科目です。本テキストの学習を通じ、基本事項の利用法と正解へのプロセスを体得し、実力を確かなものにされることを願っています。

構成と活用法

本テキストは、次のように構成されています。

- ▶ **基本事項** 問題を解くにあたって必要とされる用語・公式・法則などがまとめてあります。
- ▶ **例題** 基本事項で得た知識を、実際に問題の中で使ってみることによって身につけます。
- ▶ **演習問題A** ここに集めてある問題は、演習問題Bに取り組む前にこれだけは押さえておきたいという、必要最低限のレベルです。解けた場合も、そうでない場合も、正解に至るまでの解法を必ず確認しましょう。
- ▶ **演習問題B** 標準から発展レベルの問題を収録してあります。基本事項・例題で学んだ知識・解法をどのように応用していけばよいかを考えながら、問題に向かうと効果的です。

❖ もくじ — 数学 I

1 整式・実数・1次不等式	2
2 集合・論理	8
3 2次関数(1)	13
4 2次関数(2)	19

基本事項

1 乗法公式

- (1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ($b \rightarrow -b$ とすると) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- (2) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- (3) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ ((4)で $a=c=1$ の場合)
- (4) $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$
- (5) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

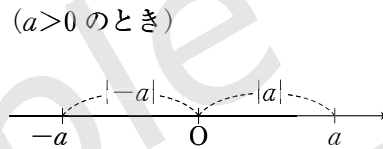
2 因数分解の公式

- (1) $ma + mb = m(a+b)$ $ma - mb = m(a-b)$
- (2) $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
- (3) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- (4) $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$
- (5) $acx^2 + (ad+bc)x + bd = (ax+b)(cx+d)$

3 絶対値の定義

実数 a に対して、その絶対値 $|a|$ を、次のように定義する。

$$\begin{aligned} a \geq 0 \text{ のとき} & \quad |a| = a \\ a < 0 \text{ のとき} & \quad |a| = -a \end{aligned}$$



4 平方根の性質

- (1) $a \geq 0$ のとき, $(\sqrt{a})^2 = a$

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a \geq 0 \text{ のとき} & a \\ a < 0 \text{ のとき} & -a \end{cases}$$
 したがって, $\sqrt{a^2} = |a|$ である。
- (2) $a > 0, b > 0$ のとき

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$
- (3) $a > 0, k > 0$ のとき

$$\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$$

5 分母の有理化

分母に根号を含む式を変形して、分母に根号を含まない式に直すことを分母の有理化といい、次のような計算をする。

- ① $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$
- ② $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$

6 不等式の性質

- (1) $a > b \implies a + c > b + c, a - c > b - c$
- (2) $c > 0$ のとき, $a > b \implies ac > bc, \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
 $c < 0$ のとき, $a > b \implies ac < bc, \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

7 不等式の解法

(1) 不等式の解と数直線

例 (i) $x < 3$

(x は3より小さい。 x は3未満)

(ii) $x \leq 3$

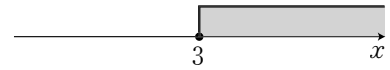
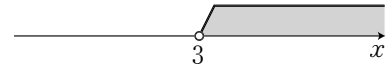
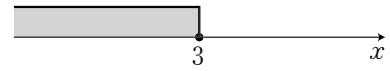
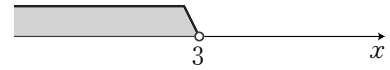
(x は3以下)

(iii) $x > 3$ ($3 < x$ も同じ)

(x は3より大きい)

(iv) $x \geq 3$ ($3 \leq x$ も同じ)

(x は3以上)

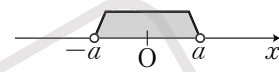
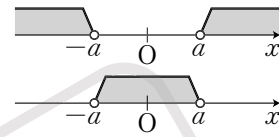


(2) 絶対値記号を含む方程式, 不等式

$a > 0$ のとき, (i) $|x| = a \iff x = \pm a$

(ii) $|x| > a \iff x < -a, a < x$

(iii) $|x| < a \iff -a < x < a$



例題 1

次の式を展開せよ。

(1) $12a^3b^2 \left(\frac{a^2}{6} - \frac{ab}{4} + \frac{b^2}{3} \right)$

(2) $(3x^2 - 4x + 2)(x^2 - 2x + 3)$

解答:

(1) 与式 $= 12a^3b^2 \times \frac{a^2}{6} - 12a^3b^2 \times \frac{ab}{4} + 12a^3b^2 \times \frac{b^2}{3}$
 $= 2a^5b^2 - 3a^4b^3 + 4a^3b^4$

(2) 与式 $= 3x^2(x^2 - 2x + 3) - 4x(x^2 - 2x + 3) + 2(x^2 - 2x + 3)$
 $= 3x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4x^3 + 8x^2 - 12x + 2x^2 - 4x + 6$
 $= 3x^4 - (6+4)x^3 + (9+8+2)x^2 - (12+4)x + 6$
 $= 3x^4 - 10x^3 + 19x^2 - 16x + 6$

例題 2

次の式を展開せよ。

(1) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x + 5)$

(2) $(x - y + 2z)^2$

解答:

(1) 与式 $= (A+3)(A+5)$ $\leftarrow x^2 - 2x = A$ とおく
 $= A^2 + 8A + 15$
 $= (x^2 - 2x)^2 + 8(x^2 - 2x) + 15$ $\leftarrow A$ をもとに戻す
 $= x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 8x^2 - 16x + 15$
 $= x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 15$

(2) 与式 $= (A+2z)^2$ $\leftarrow x - y = A$ とおく
 $= A^2 + 4Az + 4z^2$
 $= (x-y)^2 + 4z(x-y) + 4z^2$ $\leftarrow A$ をもとに戻す
 $= x^2 - 2xy + y^2 + 4zx - 4zy + 4z^2$
 $= x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy - 4yz + 4zx$

(別解)

公式 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ を用いると

$$\begin{aligned}(x-y+2z)^2 &= x^2 + (-y)^2 + (2z)^2 + 2x(-y) + 2(-y) \cdot 2z + 2 \cdot 2z \cdot x \\ &= x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy - 4yz + 4zx\end{aligned}$$

例題 3

次の式を因数分解せよ。

(1) $3x^2 + 11x + 6$

(2) $x^4 + 5x^2 + 6$

(3) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$

解答:

(1) 与式 $= 3x^2 + (9+2)x + 3 \cdot 2$

$$= (3x+2)(x+3) \quad \leftarrow \text{たすきがけの方法}$$

(2) 与式 $= (x^2)^2 + 5x^2 + 6$

$$= t^2 + 5t + 6 \quad \leftarrow x^2 = t \text{ とおく}$$

$$= (t+3)(t+2)$$

$$= (x^2+3)(x^2+2) \quad \leftarrow t \text{ をもとに戻す}$$

(3) 与式 $= x^3 - 9x - 2x^2 + 18$

$\leftarrow x^2 - 9$ が共通因数であることを見抜く

$$= x(x^2 - 9) - 2(x^2 - 9)$$

$$= (x^2 - 9)(x - 2) \quad \leftarrow a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \text{ を}$$

$$= (x+3)(x-3)(x-2) \quad x^2 - 9 = x^2 - 3^2 \text{ として用いる}$$

例題 4

次の式を簡単にせよ。

(1) $\sqrt{27} + \sqrt{3} - \sqrt{12}$

(2) $\frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

解答:

(1) 与式 $= 3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

(2) 与式 $= \frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

例題 5

次の不等式を解け。

(1) $\frac{x}{2} - \frac{1}{5} > \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$

(2) $\frac{x-1}{3} - \frac{2x-3}{4} < 1$

解答:

(1) 両辺に30をかけて $15x - 6 > 10x + 15$

移項して $5x > 21$

両辺を5で割って $x > \frac{21}{5}$

(2) 両辺に12をかけて $4(x-1) - 3(2x-3) < 12$

$$4x - 4 - 6x + 9 < 12$$

移項して $-2x < 7$

両辺を-2で割って $x > -\frac{7}{2}$ \leftarrow 不等号の向きが変わる

演習問題 A

1 次の式を計算せよ。

(1) $(-x^2)(-x)^4(-x^2)^3$

(2) $(-x^2yz)^2 \times (-3xy^2z)^2 \times (-xyz^2)^3$

2 次の式を展開せよ。

(1) $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$

(2) $(x+y-2)^2$

(3) $(x^2+x+1)^2(x-1)^2$

(4) $(x^2-2x-1)(x^2-2x+1)$

3 次の式を展開せよ。

(1) $(a-1)(a+1)(a+2)(a+4)$

(2) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

4 次の式を因数分解せよ。

(1) $9x^2+12x+4$

(2) $50x^2-18y^2$

(3) $16x^3-9xy^2$

(4) $(x-y)^2-z^2$

5 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2+7x+12$

(2) $x^2y^2-6xy+8$

(3) $a^2-5a-14$

(4) $12x^2+xy-6y^2$

6 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^4+3x^2y^2+4y^4$

(2) $x^4-3x^2y^2+y^4$

7 次の式を簡単にせよ。

(1) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

(2) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$

(3) $\frac{1}{1-\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}-2}$

(4) $\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2} + \frac{1}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$

8 $x = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, $y = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x+y$

(2) xy

(3) x^2+y^2

9 次の不等式を解け。

(1) $\frac{2x-5}{3} - \frac{3x-1}{2} < 3$

(2) $\frac{3x-8}{7} - \frac{5-x}{3} < 1$

(3) $2(2x-1) - \frac{5x+1}{3} < 2x-1$

(4) $\frac{2x-10}{3} - \frac{3x-1}{6} \leq \frac{x-2}{2}$

10 次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} 3x+1 < -3 \\ 3(1-x) < 10 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2(x-1) < 4 \\ 3x-2 < 4(x-1) \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{3-2x}{3} + 4 \geq 0 \\ 3-6x > 0 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} -5(x-1) \geq 2x+10 \\ \frac{1}{2} - \frac{x}{4} > -\frac{x-4}{7} \end{cases}$

11 10%の食塩水1360gがある。これに食塩を加えて15%以上20%以下の食塩水を作りたい。加える食塩の量の範囲を求めよ。

1 次の式を因数分解せよ。

(1) $2ab(a-b) - bc(b+2c) + 2ac(2a+c) - 3abc$

(2) $(a^2-1)(b^2-1) + 4ab$

2 $x = a^2 + 1$ のとき, $\sqrt{x+2a} + \sqrt{x-2a}$ を a で表せ。

3 $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ のとき, 次の式の値を求めよ。

(1) $x + \frac{1}{x}$

(2) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

4 $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a , 小数部分を b とするとき, 次の式の値を求めよ。

(1) a

(2) $a + b - ab - b^2$

5 2つの不等式

$$7(x-16) > 3(x-3) - 21, \quad 3(x+4) \geq 4(x-3)$$

を同時に満たす x の整数値をすべて求めよ。

6 次の方程式・不等式を解け。

(1) $|3x-2|=2$

(2) $|3x-2| < 2$