本書の特色

夏休みは，自分の弱点や不得意な分野を克服し，さらに応用力をつけるための最適な時期といえます。この本では中学３年の夏休み前までの復習を中心に，夏休み以降の学習内容の一部までをあつかっています。基礎的な事項の確認から，応用・発展的な難問まで，幅広く盛り込まれていますから，応用力を効果的に身につけることができます。

各課とも，最初の２ページで基本的な問題を解きながら重要なポイントをおさえ，次の２ページの演習問題で実力を定着させる…という流れになっています。

また，講習準備テストと総合確認テストがついているので，苦手分野の把握や最後の効果測定に役立ててください。

本書の使い方

- **要点整理**……………各課の基本事項をまとめています。
- **例　　題**……………各課の代表的な問題のパターンをとりあげて，その考え方を示してあります。すぐ下の類題でくり返し練習し，しっかり身につけましょう。
- **演習問題**……………確認問題や例題で学習したことがらを確実にするための問題です。演習問題Ｂには難しい問題も含まれていますから，じっくり時間をかけ，解けるようになるまで学習しましょう。
- **総合問題**……………本書の総まとめの問題です。
- **レベルアップ**………入試において正答率が低くなりがちな問題を載せています。難しいですが，少しずつ練習しましょう。

もくじ

数学 中3

9　関数 $y=ax^2$

要点整理

❶　２乗に比例する関数

y が x の関数で，$y=ax^2$（a は 0 でない定数）と表されるとき，y は x の 2 乗に比例するという。

また，a を比例定数という。

❷　関数 $y=ax^2$ の性質

［1］　y が x の 2 乗に比例するとき，x の値が k 倍になると，y の値は k^2 倍になる。

［2］　x が 0 でないとき，商 $\dfrac{y}{x^2}$ は一定で，この値は比例定数 a に等しい。

［3］　y が x の 2 乗に比例するとき，比例定数 a は $x=1$ のときの y の値に等しい。

❸　$y=ax^2$ のグラフ

軸が y 軸，頂点が原点の放物線であり，y 軸について対称な形をしている。

❹　$y=ax^2$ の変域

［1］　x の変域に 0 を含まない場合（**図１，図２**）

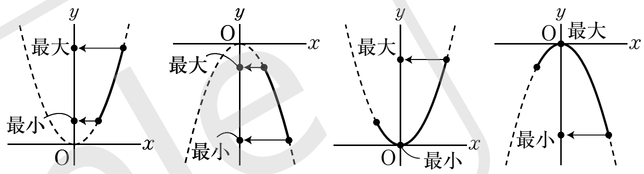
y の変域の端の値は，x の変域の端の値に対応。

［2］　x の変域に 0 を含む場合

$a>0$ のとき，y の最小値は 0 。（**図３**）

$a<0$ のとき，y の最大値は 0 。（**図４**）

図１　**図２**　**図３**　**図４**



❺　変化の割合

変化の割合$=\dfrac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}}$

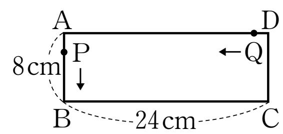
１次関数 $y=ax+b$ の変化の割合は一定で a に等しいが，関数 $y=ax^2$ の変化の割合は一定ではない。

❻　放物線と直線

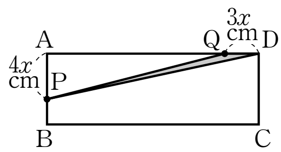
放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=mx+n$ の交点の座標を求めるには，連立方程式 $\begin{cases} y=ax^2 \\ y=mx+n \end{cases}$ を解く。

例題 1　$y=ax^2$ の利用

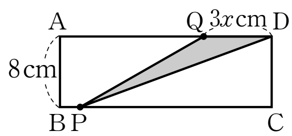
右の図のように，AB＝8 cm，BC＝24 cm の長方形ABCDがある。点Pは頂点Aを出発して，辺上を毎秒 4 cm の速さでA→B→C→Dと進み，頂点Dで止まる。また，点Qは頂点Dを出発して，辺上を毎秒 3 cm の速さでD→A→Bと進み，点Pが止まると同時に点Qも止まる。点P，Qが同時に出発して，x 秒後にできる三角形DPQの面積を y cm^2 とするとき，y を x の式で表しなさい。



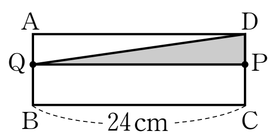
解法　（ⅰ）　PがAB上，QはDA上　（ⅱ）　PがBC上，QはDA上　（ⅲ）　PがCD上，QはAB上



$y=\dfrac{1}{2}\times 3x\times 4x=6x^2$



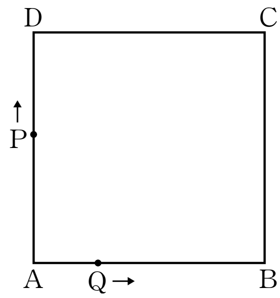
$y=\dfrac{1}{2}\times 3x\times 8=12x$



$y=\dfrac{1}{2}\times(40-4x)\times 24=-48x+480$

答　$0\leqq x\leqq 2$ のとき，$y=6x^2$　　$2\leqq x\leqq 8$ のとき，$y=12x$　　$8\leqq x\leqq 10$ のとき，$y=-48x+480$

1 右の図のような１辺６cmの正方形ABCDがある。点Pは頂点Aを出発し，毎秒２cmの速さで，正方形の周上をD，Cを通り頂点Bに向かって動く。また，点Qは，点Pと同時に頂点Aを出発し，毎秒１cmの速さで，正方形の周上をBを通り，頂点Cに向かって動く。いま，点P，Qが頂点Aを出発してから x 秒後の△APQの面積を y cm^2 として，次の問いに答えなさい。ただし，点P，Qが頂点Aを出発してからはじめて出会うまでの範囲で考えるものとする。



□(1)　点Pが辺AD上にあるときの x と y の関係を式に表し，x の変域も書け。

式［　　　　　　　］　変域［　　　　　　　］

□(2)　点Pが辺DC上にあるときの x と y の関係を式に表し，x の変域も書け。

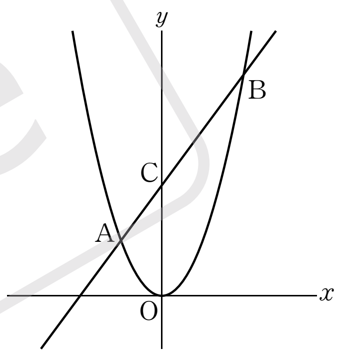
式［　　　　　　　］　変域［　　　　　　　］

□(3)　点Pが辺CB上にあるときのPQの長さを x を使って表し，x の変域も書け。

PQの長さ［　　　　　　　］　変域［　　　　　　　］

例題 2　放物線と直線

右の図のように，関数 $y=x^2$ と１次関数 $y=x+2$ のグラフが２点A，Bで交わっているとき，次の問いに答えなさい。



(1)　△OABの面積を求めよ。
(2)　直線ABと y 軸との交点をCとするとき，△OACと△OBCの面積の比を求めよ。
(3)　原点を通り，△OABの面積を２等分する直線の式を求めよ。

解法　(1)　２つのグラフの交点A，Bの座標を求める。

$\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+2 \end{cases}$ を解くと，$x=-1$，$y=1$　$x=2$，$y=4$

よって，A$(-1,\ 1)$，B$(2,\ 4)$となり，$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times2\times(1+2)=3$

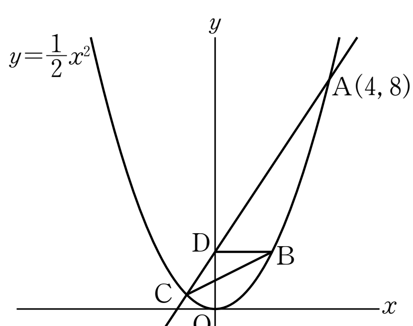
(2)　OCを底辺とみると，△OACと△OBCの面積の比は，高さの比（1：2）と同じになる。

(3)　ABの中点の座標は，$\left(\dfrac{-1+2}{2},\ \dfrac{1+4}{2}\right)$ より $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$

この点と原点を通る直線の傾きは，$\dfrac{5}{2}\div\dfrac{1}{2}=5$ であるから，$y=5x$

答　(1)　3　　(2)　1：2　　(3)　$y=5x$

2 右の図のように，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ 上に点A$(4,\ 8)$，B，Cをとり，y 軸上に点D$(0,\ 2)$をとる。線分BDが x 軸に平行であり，点Cが直線ADと放物線のA以外の交点であるとき，次の問いに答えなさい。ただし，点Bの x 座標は正とする。



回(1)　△ABCの面積を求めよ。

［　　　　　　　］

回(2)　点Eを放物線上の点Bと点Cの間にとり，△ACEの面積と△ACBの面積が等しくなるようにする。このとき，点Eの座標を求めよ。

［　　　　　　　］

演 習 問 題 A

1 次の問いに答えなさい。

回(1) x の変域が $-3 \leqq x \leqq 2$ のとき，2つの関数 $y=2x+6$，$y=ax^2$ の y の変域が同じになる。このとき，a の値を求めよ。

[　　　　　　]

□(2) 関数 $y=x^2$ について，x の値が p から $p+2$ まで増加する。変化の割合が5となるとき，p の値を求めよ。

[　　　　　　]

2 右の**図1**のように，AB＝10cm，CD＝6cm，DA＝4cm，∠BAD＝∠ADC＝90° の台形ABCDがある。点P，Qは，頂点Aを同時に出発して，点Pは辺AD，DC上を頂点Cまで，点Qは辺AB上を頂点Bまで，それぞれ毎秒1cmの速さで動く。このとき，△APCと△APQについて，次の問いに答えなさい。

図1

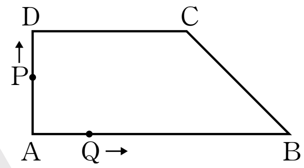
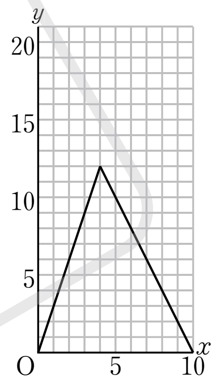


図2



回(1) 点Pが頂点Aを出発してから x 秒後の△APCの面積を y cm^2 とし，x と y の関係をグラフに表すと右の**図2**のようになった。

$4 \leqq x \leqq 10$ のとき，y を x の式で表せ。

[　　　　　　]

回(2) 点P，Qが頂点Aを出発してから x 秒後の△APQの面積を y cm^2 とするとき，次のそれぞれの場合について，y を x の式で表せ。また，そのグラフを，**図2**にかき入れよ。

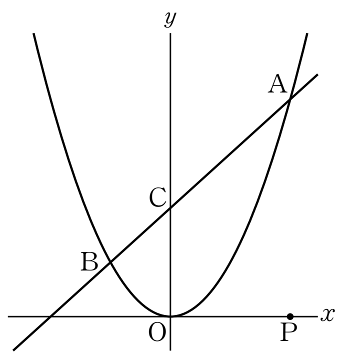
① $0 \leqq x \leqq 4$ のとき　　　② $4 \leqq x \leqq 10$ のとき

[　　　　　　]　[　　　　　　]

□(3) △APCと△APQの面積が等しくなるのは，点P，Qが頂点Aを出発してから何秒後か。ただし，点P，Qが頂点Aの位置にあるときは除く。

[　　　　　　]

3 右の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフ上に2点A (4, 8)，B (−2, b) があり，2点A，Bを通る直線は y 軸と点Cで交わっている。また，点Pは x 軸上の点で，その座標を(p, 0)とする。次の問いに答えなさい。



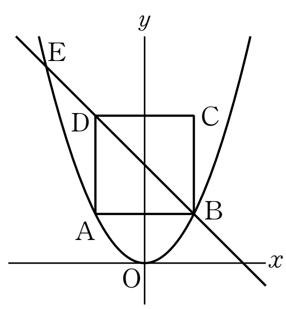
回(1) 定数 a，b の値を求めよ。

a[　　　　　　]　b[　　　　　　]

回(2) △CBPの面積が△ABOの面積と等しくなるような p の値を求めよ。ただし，$p>0$ とする。

[　　　　　　]

4 右の図のように，放物線 $y=x^2$ と正方形ABCDがある。2点A，Bは放物線上の点であり，それぞれの y 座標はともに1である。2点B，Dを通る直線と点B以外の放物線との交点をEとするとき，次の問いに答えなさい。



□(1) 2点B，Dを通る直線の式を求めよ。

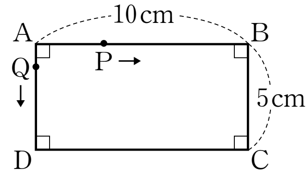
[　　　　　　]

□(2) △OBEの面積を求めよ。

[　　　　　　]

演習問題 B

1 右の図の長方形ABCDで，点Pは頂点Aを出発し，毎秒3cmの速さでBを通って頂点Cまで辺上を進む。また，点Qは頂点Aを出発し，毎秒1cmの速さで頂点Dまで辺上を進む。点P，Qが同時に頂点Aを出発してから x 秒後の△APQの面積を y cm^2 とするとき，次の問いに答えなさい。



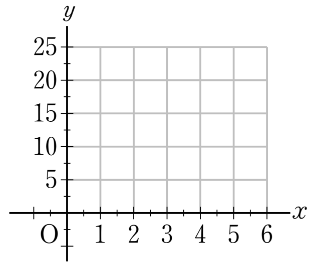
□(1) 点Pが辺AB上にあるとき，y を x の式で表し，x の変域も書け。

式［　　　　　　］ 変域［　　　　　　］

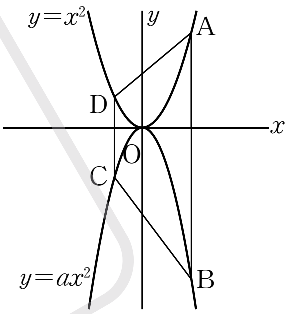
□(2) △APQの面積が24cm^{2}になるのは出発してから何秒後か。

［　　　　　　］

□(3) x と y の関係をグラフに表せ。



2 右の図のように，$y=x^2$，$y=ax^2$ $(a<0)$ のグラフがあり，点A，Dは $y=x^2$ のグラフ上に，点B，Cは $y=ax^2$ のグラフ上にある。点A，Bの x 座標は2，点D，Cの x 座標は -1 である。このとき，次の問いに答えなさい。



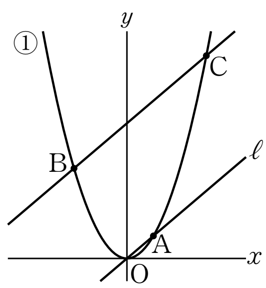
□(1) 線分ABの長さを，a を使った式で表せ。

［　　　　　　］

□(2) 台形ABCDの面積が30のとき，a の値を求めよ。

［　　　　　　］

3 関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ ……①のグラフがある。原点Oと点A(2, 2)を通る直線を ℓ とし，点B(−4, 8)を通り，ℓ に平行な直線が①のグラフと再び交わる点をCとする。このとき，次の問いに答えなさい。



□(1) 2点B，Cを通る直線の式を求めよ。

［　　　　　　］

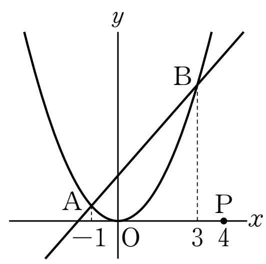
□(2) △ABCの面積を求めよ。

［　　　　　　］

□(3) 原点Oを通り，四角形OACBの面積を2等分する直線の式を求めよ。

［　　　　　　］

4 右の図で，放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=8x+b$ が2点A，Bで交わっていて，A，Bの x 座標はそれぞれ -1，3である。x 軸上に点P(4, 0)をとるとき，次の問いに答えなさい。



□(1) a，b の値を求めよ。

a［　　　　　　］ b［　　　　　　］

□(2) △APBの面積を求めよ。

［　　　　　　］

□(3) 放物線上に点Qをとり，△APBと△AQBの面積が等しくなるとき，点Qの x 座標を求めよ。

［　　　　　　］