## はじめに

本テキストは，皆さんが無理なく基本をマスターし，かつ応用力を養成できるように編集してあります。

単元ごとに，知識の確認のための基本事項とそれを定着させるための例題があり，さらに問題を解く力を確実にするために，演習問題Ａと演習問題Ｂが段階を追って配列してあります。また，分からない問題がでてきたら，すぐに基本事項や例題に戻って，新出の用語・公式・法則などを確認し，その使い方を見ることができます。

数学は暗記だけでは対応できない科目です。本テキストの学習を通じ，基本事項の利用法と正解へのプロセスを体得し，実力を確かなものにされることを願っています。

## 構成と活用法

本テキストは，次のように構成されています。

**▶基本事項**　問題を解くにあたって必要とされる用語・公式・法則などがまとめてあります。

**▶例　題**　基本事項で得た知識を，実際に問題の中で使ってみることによって身につけます。

**▶演習問題A**　ここに集めてある問題は，演習問題Ｂに取り組む前にこれだけは押さえておきたいという，必要最低限のレベルです。解けた場合も，そうでない場合も，正解に至るまでの解法を必ず確認しましょう。

**▶演習問題B**　標準から発展レベルの問題を収録してあります。基本事項・例題で学んだ知識・解法をどのように応用していけばよいかを考えながら，問題に向かうと効果的です。



## もくじ —— 高2数学

# 第 1 講　式と証明(1)

## 基本事項

### 1　3次の乗法公式

(1)　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(2)　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$　$\longleftarrow$(1)で $b \to -b$ とする

(3)　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

(4)　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$　$\longleftarrow$(3)で $b \to -b$ とする

### 2　3次式の因数分解

(1)　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　$\longleftarrow$乗法公式(3)

(2)　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$　$\longleftarrow$乗法公式(4)

### 3　二項定理

$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}ab^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_nb^n$

$(a+b)^n$ の展開式における項は上のように，一般に

${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$　$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

と表される。

これを $(a+b)^n$ の展開式の一般項，${}_n\mathrm{C}_r$ を二項係数という。

例　$(2x+y)^5={}_5\mathrm{C}_0(2x)^5+{}_5\mathrm{C}_1(2x)^4y+{}_5\mathrm{C}_2(2x)^3y^2+{}_5\mathrm{C}_3(2x)^2y^3+{}_5\mathrm{C}_4\cdot 2xy^4+{}_5\mathrm{C}_5y^5$

$=32x^5+80x^4y+80x^3y^2+40x^2y^3+10xy^4+y^5$

$(2x+y)^5$ の展開式の一般項は

${}_5\mathrm{C}_r(2x)^{5-r}y^r$　$(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

である。

《注》 ${}_n\mathrm{C}_r$ の公式，値として

${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$，${}_n\mathrm{C}_0=1$，${}_n\mathrm{C}_n=1$ は覚えておくこと。

### 4　整式の除法

整式 $f(x)$ を整式 $P(x)$ で割ったときの商が $Q(x)$，余りが $R(x)$ であるとき

$f(x)=P(x)Q(x)+R(x)$

（ただし，$R(x)$ の次数は $P(x)$ の次数より小さい）

が成り立つ。

### 5　分数式の計算

(1)　分母の異なる分数式の加減は，まず通分をして分母をそろえる。

(2)　分母と分子が同じ因数をもつ場合は，約分をして簡単にする。

## 例題1

次の式の(1)，(2)については展開せよ。また，(3)，(4)については因数分解せよ。

(1)　$(x+2)^3$　　(2)　$(2x-1)^3$

(3)　$x^3+8$　　(4)　$8x^3-27y^3$

**解答**

(1)　$(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$

$=x^3+6x^2+12x+8$

(2)　$(2x-1)^3=(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 1+3\cdot(2x)\cdot 1^2-1^3$

$=8x^3-12x^2+6x-1$

(3)　$x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)$

$=(x+2)(x^2-2x+4)$

(4)　$8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3$

$=(2x-3y)\{(2x)^2+2x\cdot 3y+(3y)^2\}$

$=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$

《注》　慣れてくるまでは，因数分解した後，必ず検算を行うようにしたい。

(3)では

$(x+2)(x^2-2x+4)=x(x^2-2x+4)+2(x^2-2x+4)$

$=x^3-2x^2+4x+2x^2-4x+8$

$=x^3+8$

(4)では

$(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)=2x(4x^2+6xy+9y^2)-3y(4x^2+6xy+9y^2)$

$=8x^3+12x^2y+18xy^2-12x^2y-18xy^2-27y^3$

$=8x^3-27y^3$

というように，必ず答えの式を展開してもとの式となることを確認しておくこと。

展開　$\rightleftarrows$　因数分解

と頭にたたき込んでおくこと。

## 例題2

次の式を展開したときの[　]内の項の係数を求めよ。

(1)　$(2x+y)^8$　$[x^3y^5]$　　(2)　$(2x^2+3)^6$　$[x^2]$

(3)　$(x+y+z)^6$　$[x^3yz^2]$

**解答**

(1)　$(2x+y)^8$ の展開式の一般項は

${}_8\mathrm{C}_r(2x)^{8-r}y^r={}_8\mathrm{C}_r 2^{8-r}x^{8-r}y^r$

よって，$x^3y^5$ の項は $r=5$ のときであるから，求める係数は

${}_8\mathrm{C}_5\cdot 2^{8-5}={}_8\mathrm{C}_3\cdot 2^3$　　$\longleftarrow {}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3$

$=448$

(2)　$(2x^2+3)^6$ の展開式の一般項は

${}_6\mathrm{C}_r(2x^2)^{6-r}3^r={}_6\mathrm{C}_r\cdot 2^{6-r}3^r(x^2)^{6-r}$

ここで，$2(6-r)=2$ を解くと，$r=5$ となるから，求める係数は

${}_6\mathrm{C}_5\cdot 2\cdot 3^5=6\cdot 2\cdot 243$

$=2916$

(3)　$\{(x+y)+z\}^6$ の展開式の一般項は　　←── $x+y$ を 1 つのものと考えて $\{(x+y)+z\}^6$ を展開する

$${}_6\mathrm{C}_r(x+y)^{6-r}z^r \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，$z$ の次数に着目すると，$x^3yz^2$ が現れるのは $r=2$ の場合だけである。

$r=2$ のとき，①は

$${}_6\mathrm{C}_2(x+y)^4z^2$$

となり，$(x+y)^4$ を展開したときの $x^3y$ の係数は ${}_4\mathrm{C}_1$ である。　←── $(x+y)^4$ の展開式の一般項は，${}_4\mathrm{C}_kx^{4-k}y^k$

したがって，$x^3yz^2$ の係数は，${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1=60$

## 例題 3

次の整式 $A$ を整式 $B$ で割ったときの商と余りを求めよ。

$$A=3x^3-14x^2+10,\qquad B=x^2+2-5x$$

**解答**

$$\begin{array}{r|l}
 & 3x\ +1 \\ \hline
x^2-5x+2 & 3x^3-14x^2\qquad\ \ +10 \\
 & 3x^3-15x^2+6x \\ \hline
 & \qquad\quad x^2-6x+10 \\
 & \qquad\quad x^2-5x+\ 2 \\ \hline
 & \qquad\qquad -x+\ 8
\end{array}$$

←── 割られる式で，ある次数の項がない場合は，その場所を空けておくと計算しやすい。

上の計算により，商　$3x+1$

余り　$-x+8$

## 例題 4

次の式を計算せよ。

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

**解答**

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{(x+2)(x+3)+x(x+3)+x(x+1)}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$ ←── 通分する

$$=\frac{3x^2+9x+6}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\frac{3(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$$ ←── 分子を因数分解する

$$=\frac{3}{x(x+3)}$$

**(別解)**

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$$

であるから

与式$=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{3}{x(x+3)}$

# 演習問題A

**1** 次の式を展開せよ。

(1) $(x-1)^3$　　(2) $(x+3)^3$

(3) $(x+5y)^3$　　(4) $(3x-y)^3$

**2** 次の式を展開せよ。

(1) $(x+4)(x^2-4x+16)$

(2) $(3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2)$

**3** 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3+1$

(2) $125x^3-64y^3$

**4** 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^6-1$

(2) $x^6+7x^3-8$

**5** 次の式を因数分解せよ。

$$x^3+y^3+3y^2+3y+1$$

**6** 次の問いに答えよ。

(1) $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ を展開せよ。

(2) $x-y=2-\sqrt{3}$，$y-z=2+\sqrt{3}$ のとき，次の式の値を求めよ。

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$$

**7** 次の式を展開したときの[　]内の項の係数を求めよ。

(1) $(3x-2)^6$ 　$[x^2]$

(2) $(3x^2-1)^8$ 　$[x^6]$

**8** 次の式を展開したときの[　]内の項の係数を求めよ。

(1) $(x+y+1)^6$ 　$[x^2y^3]$

(2) $(x+y+2z)^9$ 　$[x^3y^3z^3]$

**9** 次の整式$A$を整式$B$で割ったときの商と余りを求めよ。

(1) $A=2x^3-4x+1$,　$B=4-3x+x^2$

(2) $A=x^4-3x^3-2x+8$,　$B=2-x-2x^2$

(3) $A=x^3+2x^2+ax+b$,　$B=x^2+x+1$



**10** 整式$A$を $2x^2-x+4$ で割ると，商が $3x-1$，余りが $x+2$ であるとき$A$を求めよ。

**11** 次の式を計算して簡単にせよ。

(1) $\dfrac{n^2-4}{(n+2)^2}\times\dfrac{n^2+2n+4}{n^2-2n+4}\div\dfrac{n^3-8}{n^3+8}$

(2) $\dfrac{1}{x(x-2)}+\dfrac{1}{x(x+2)}-\dfrac{1}{x^2-4}$

(3) $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}$

# 演習問題 B

**1** 次の式を因数分解せよ。

$$(x-y)^3+(z-y)^3-(x-2y+z)^3$$

**2** $(ax+2y)^6$ を展開したところ，$x^2y^4$ の項の係数は1440であった。ただし，$a>0$とする。

(1) $a$の値を求めよ。

(2) $x^4y^2$ の項の係数を求めよ。

**3** 次の等式が成り立つことを示せ。

$${}_nC_0-2{}_nC_1+2^2{}_nC_2-\cdots+(-2)^n{}_nC_n=(-1)^n$$

**4** $x=1-\sqrt{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $x^2-2x-1$

(2) $x^4-x^3-5x^2+x+5$

**5** 次の式を計算して簡単にせよ。

$$\frac{x+2}{x^2+7x+12}-\frac{x+4}{x^2+5x+6}-\frac{x^2+3x}{(x+2)(x^2+7x+12)}$$