# 第2講　1次不等式・絶対値

## 基本事項

### 1　2つの数の大小関係

2つの数$A$，$B$の大小関係については，次のどれか1つだけが成り立つ。

$A>B$，$A=B$，$A<B$

### 2　不等式の性質

数量の間の大小関係を不等号で表した式を不等式という。

(1)　$a>b$のとき，$a+c>b+c$，$a-c>b-c$

(両辺に同じ数を加えたり両辺から同じ数を引いたりしても，不等号の向きは変わらない)

(2)　$\begin{cases} a>b \text{ で } c>0 \text{ のとき，} ac>bc，\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c} \\ a>b \text{ で } c<0 \text{ のとき，} ac<bc，\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c} \end{cases}$

(両辺に正の数をかけたり両辺を同じ数で割ったりしても，不等号の向きは変わらないが，負の数をかけたり負の数で割ったりすると，不等号の向きが変わる)

なお，「$a>b$」が「$a\geqq b$」，「$a<b$」が「$a\leqq b$」であっても同様の性質が成り立つ。

### 3　1次不等式の解法

式を整理すると左辺が$x$の1次式になる不等式を1次不等式といい，これを満たす$x$の範囲を求めることを1次不等式を解くという。1次不等式は1次方程式と同様に，次の手順で解くことができる。

(1)　小数があれば，両辺に10，100，……をかけ，分数があれば，両辺に分母の最小公倍数をかけて，小数や分数をなくす。

(2)　かっこがあれば，分配法則を使ってかっこをはずす。

(3)　移項して，左辺に$x$の項，右辺に定数項をまとめる。

(4)　両辺を$x$の係数で割って$x$の範囲を求める。ただし，$x$の係数が負の数のときは，**2**の不等式の性質(2)より，両辺を$x$の係数で割った後に不等号の向きが変わる。

(例)　$3x-7<5x+9$

$3x-5x<9+7$

$-2x<16$

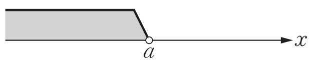
$x>-8$　　←負の数で両辺を割ると，不等号の向きが変わる。

### 4　不等式の解と数直線

数直線上では不等式の解を次のように表す。

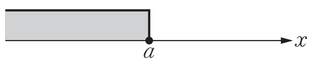
(1)　$x<a$

$x$は$a$より小さい($x$は$a$未満)



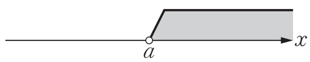
(2)　$x\leqq a$

$x$は$a$以下



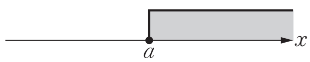
(3)　$x>a$　($a<x$と表すこともある)

$x$は$a$より大きい



(4)　$x\geqq a$　($a\leqq x$と表すこともある)

$x$は$a$以上



## 5 連立不等式

$\begin{cases} A<B \\ C<D \end{cases}$ のように，２つ以上の不等式が組になっている不等式を連立不等式という。連立不等式を解くには，それぞれの不等式を解き，それらの共通範囲を求めればよい。また，数直線を使うと，共通範囲を求めるのに悩まず正確に解きやすい。

$A<B<C$ の形の連立不等式は，$\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ の形に直して解けばよい。

## 6 絶対値

数直線上で，原点と点 $\mathrm{P}(a)$ との間の距離を $a$ の絶対値といい，$|a|$ のように表す。

$a \geqq 0$ のとき，$|a|=a$　　（絶対値記号をそのままはずせる）

$a<0$ のとき，$|a|=-a$　　（絶対値記号をはずしたら符号が変わる）

絶対値は，次のような性質がある。

$|a| \geqq 0$，$|a|=|-a|$，$|a| \geqq a$，$|a| \geqq -a$

$|a|^2=|a^2|=a^2$，$|ab|=|a||b|$

## 7 絶対値記号をふくむ方程式，不等式

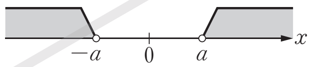
絶対値記号をふくむ方程式や不等式は，絶対値記号をはずせば，その後はこれまで学習した方程式や不等式の解き方の手順で解くことができる。絶対値記号は次のようにはずす。ただし，$a>0$ とする。

(1)　$|x|=a$

$x=\pm a$

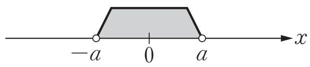
(2)　$|x|>a$

$x<-a$，$a<x$




(3)　$|x|<a$

$-a<x<a$




絶対値記号の中が１次式の場合も同様に考える。右辺に変数を含むときは，6のように場合分けする。

例１　$|2x+1|=5$

$2x+1=\pm 5$

$2x+1=5$ のとき，$x=2$

$2x+1=-5$ のとき，$x=-3$

よって，$x=2$，$-3$

例２　$|x+2|=2x+3$

$x+2 \geqq 0$，すなわち $x \geqq -2$ のとき，

$x+2=2x+3$

$x=-1$

これは $x \geqq -2$ を満たす。

$x+2<0$，すなわち $x<-2$ のとき，

$-x-2=2x+3$

$x=-\dfrac{5}{3}$

これは $x<-2$ を満たさない。

よって，$x=-1$

例３　$|2x+3|>7$

$2x+3<-7$，$7<2x+3$

$2x+3<-7$ のとき，$x<-5$

$7<2x+3$ のとき，$2<x$

よって，$x<-5$，$2<x$

例４　$|4x-8|<12$

$-12<4x-8<12$

$-12<4x-8$ より，$-1<x$

$4x-8<12$ より，$x<5$

よって，$-1<x<5$

## 例題 1

次の不等式を解け。

(1)　$-3x+14 \geqq 4x-21$

(2)　$\dfrac{x+4}{3}+2x<-3x$

**解答**

(1)　移項して　$-3x-4x \geqq -21-14$

$-7x \geqq -35$

両辺を$-7$で割って　$x \leqq 5$

(2)　両辺に3倍をかけて　$x+4+6x<-9x$

移項して　$x+6x+9x<-4$

$16x<-4$

両辺を16で割って　$x<-\dfrac{1}{4}$

**類題 1**　次の不等式を解け。

(1)　$5x+9<2x+3$

(2)　$3x-5 \leqq 10x+16$

(3)　$\dfrac{x-1}{2} \geqq 2x-5$

(4)　$\dfrac{3x+2}{4}<x+3$

## 例題 2

次の不等式を解け。

(1)　$\begin{cases} 8x+5 \geqq 5x-1 & \cdots\cdots① \\ x+8<3x+2 & \cdots\cdots② \end{cases}$

(2)　$-5x+3<3x-5<x+7$

**解答**

(1)　①の不等式について，移項して

$8x-5x \geqq -1-5$

$3x \geqq -6$

両辺を3で割って

$x \geqq -2$　……③

②の不等式について，移項して

$x-3x<2-8$

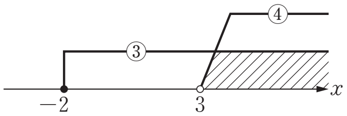
$-2x<-6$

両辺を$-2$で割って

$x>3$　……④

③，④の共通範囲を求めて

$x>3$




(2)　不等式を

$\begin{cases} -5x+3<3x-5 & \cdots\cdots① \\ 3x-5<x+7 & \cdots\cdots② \end{cases}$

の形に直して考えればよい。

①の不等式について，移項して

$-5x-3x<-5-3$

$-8x<-8$

両辺を$-8$で割って

$x>1$　……③

②の不等式について，移項して

$3x-x<7+5$

$2x<12$

両辺を2で割って

$x<6$　……④

③，④の共通範囲を求めて

$1<x<6$

※なお，$3x-5<x+7$の代わりに$-5x+3<x+7$を使って解くと，$-\dfrac{2}{3}<x$となり誤った解になる。

**類題 2**　次の不等式を解け。

(1)　$\begin{cases} 3x+2 \geqq 2x-1 \\ 5x+7<7x-1 \end{cases}$

(2)　$4x-7<2x-1<5x+2$

## 例題 3

次の方程式を解け。

(1) $|x+5|=2$　　(2) $|2x+4|=-x+4$

(3) $|x-1|=-2x+5$

**解答**

(1) $|x+5|=2$

$x+5=\pm 2$

$x+5=2$ のとき，$x=-3$

$x+5=-2$ のとき，$x=-7$

よって，$x=-3,\ -7$

(2) $2x+4\geqq 0$，すなわち $x\geqq -2$ のとき，

$2x+4=-x+4$

$x=0$

これは $x\geqq -2$ を満たす。

$2x+4<0$，すなわち $x<-2$ のとき，

$-2x-4=-x+4$

$x=-8$

これは $x<-2$ を満たす。

よって，$x=0,\ -8$

(3) $x-1\geqq 0$，すなわち $x\geqq 1$ のとき，

$x-1=-2x+5$

$x=2$

これは $x\geqq 1$ を満たす。

$x-1<0$，すなわち $x<1$ のとき，

$-x+1=-2x+5$

$x=4$

これは $x<1$ を満たさない。

よって，$x=2$

**類題 3**　次の方程式を解け。

(1) $|x-1|=7$　　(2) $|2x+1|=x+1$

(3) $|x+3|=3x+3$

## 例題 4

次の不等式を解け。

(1) $|x-4|>2$　　(2) $|3x-6|\leqq x+2$

**解答**

(1) 絶対値記号をはずすと

$x-4<-2,\ 2<x-4$

$x-4<-2$ のとき，$x<2$

$2<x-4$ のとき，$x>6$

よって，$x<2,\ 6<x$

(2) $3x-6\geqq 0$，すなわち $x\geqq 2$　……① のとき，

$3x-6\leqq x+2$

$2x\leqq 8$

$x\leqq 4$

これと①より，$2\leqq x\leqq 4$

$3x-6<0$，すなわち $x<2$　……② のとき，

$-3x+6\leqq x+2$

$-4x\leqq 4$

$x\geqq 1$

これと②より，$1\leqq x<2$

よって，$1\leqq x\leqq 4$

**類題 4**　次の不等式を解け。

(1) $|x+3|>5$　　(2) $|4x-5|\leqq 2x+3$

# 演　習　問　題　A

**1**　次の不等式を解け。

(1)　$2x+5<-x+8$

(2)　$-2x+1>2x-7$

(3)　$3x+2\leqq -x-12$

(4)　$2(x+1)\geqq 3(x-4)$

(5)　$1.4x+0.7>x-4.1$

(6)　$\dfrac{2x+5}{3}-\dfrac{3x-13}{4}\leqq\dfrac{13}{6}$

**2**　次の不等式を解け。

(1)　$\begin{cases} 5x-8<x \\ 2x+9\geqq 3 \end{cases}$

(2)　$\begin{cases} 6x+7\geqq 2x+3 \\ 5(x-5)<2x-7 \end{cases}$

(3)　$5x-20<8x+7<4x+19$

(4)　$2(4x-3)<6x\leqq 3(3x+1)$

**3**　次の方程式を解け。

(1)　$|x|=3$

(2)　$|2x+3|=7$

(3)　$|3x+1|=x+3$

(4)　$|x-1|=3x$

**4**　次の不等式を解け。

(1)　$|x|<9$

(2)　$|x+4|\geqq 3$

(3)　$|2x-5|\geqq x+4$

(4)　$|x-6|\leqq 4x$

**5**　定価100円の商品がある。A店では，購入する個数に関わらず，８％の割引を行って商品を販売している。一方，B店は，10個目までは定価のままだが，11個目からは定価の15％の割引を行って販売している。A店よりもB店で購入した方が安いのは，商品を何個以上購入するときか求めよ。

# 演習問題 B

**1** 次の値を求めよ。

(1) $|1-2\sqrt{3}|$

(2) $\left|\dfrac{\pi}{2}-1.5\right|+\left|\dfrac{\pi}{2}-2\right|$

**2** 次のものを求めよ。

(1) 不等式 $6x-5<4x+3$ を満たすすべての自然数 $x$

(2) 不等式 $-2x+9<16$ を満たす最も小さい整数 $x$

**3** 次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} 6x-(x+1)\geqq 18 \\ \dfrac{1-4x}{3}-\dfrac{2-3x}{4}>-\dfrac{8}{3} \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 3(x+2)<5x+\dfrac{x-3}{2} \\ \dfrac{x-2}{5}\geqq\dfrac{x-4}{2} \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x+8>2x+7 \\ |x|\leqq 4 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} |2x-5|<12 \\ |3x+8|>2 \end{cases}$

**4** 2つの不等式 $|x-6|<3$ ……①，$|x-k|<5$ ……② がある。ただし，定数 $k$ は実数とする。

(1)(ア) ①の不等式を解け。

(イ) ②の不等式を解け。

(2) ①，②をともに満たす実数 $x$ が存在するような $k$ の値の範囲を求めよ。

**5** $a$ は実数の定数とする。

(1) $|x-a|<2$ を満たす実数 $x$ の値の範囲を求めよ。

(2) $|x-a|<2$ を満たす正の実数 $x$ が存在するような $a$ の値の範囲を求めよ。

(3) $|x-a|<x+1$ を満たす実数 $x$ が存在するような $a$ の値の範囲を求めよ。

(4) $a$ の値が(3)の範囲にあるとき，$|x-a|<x+1$ を満たす実数 $x$ の値の範囲を求めよ。