12 関数のグラフと図形

ステップ1 **2点間の距離**

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2x+3$ があり，放物線と直線の2つの交点をA，Bとする。点Aの x 座標が -1 のとき，次の問いに答えなさい。

(1) ABの長さを求めよ。　(2) 点Oから直線 $y=2x+3$ へ下ろした垂線の長さを求めよ。

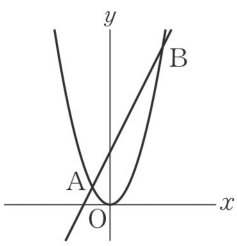
解き方 (1) $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x+3 \end{cases}$ を解いて，

$(x,\ y)=(-1,\ 1),\ (3,\ 9)$

A$(-1,\ 1)$，B$(3,\ 9)$より，$AB=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$

(2) $\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times3\times(1+3)=6$

垂線の長さを h とすると，$\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times h=6$　$h=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$



プラスワン

点A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$を結ぶ線分ABの長さは，

$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

答 (1) $4\sqrt{5}$　(2) $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

著作権者への配慮から、掲載を差し控えております。
実際の教材には掲載されておりますのでご安心ください。

ステップ2 **垂直になる2つの直線**

2点A$(-3,\ 1)$，B$(5,\ 7)$と，x 軸上を動く点Pがある。$\angle APB=90°$ となるとき，点Pの x 座標を求めなさい。

解き方1 △APBにおいて，三平方の定理より，

$AP^2+BP^2=AB^2$

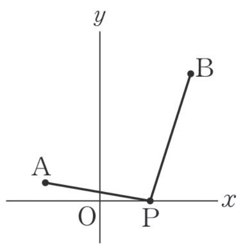
P$(p,\ 0)$とおくと，$(p+3)^2+1^2+(p-5)^2+7^2=8^2+6^2$

$p^2-2p-8=0$　これを解いて，$p=-2,\ 4$

解き方2

(直線APの傾き)×(直線BPの傾き)$=-1$

P$(p,\ 0)$とおくと，$\dfrac{-1}{p+3}\times\dfrac{7}{5-p}=-1$　これを解いて，$p=-2,\ 4$



プラスワン

90°であることは，次の①，②などの考え方で，式に表すとよい。

① 三平方の定理

② 2直線の垂直条件

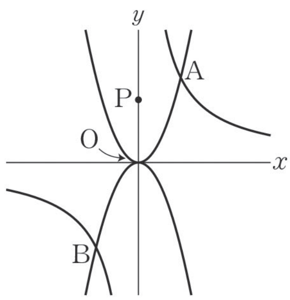
答 $-2,\ 4$

□ **チェック②**

放物線 $y=x^2$ ……①，$y=-x^2$ ……②，双曲線 $y=\dfrac{8}{x}$ ……③ がある。点A$(2,\ 4)$とし，②と③の交点をBとする。また，点Pは y 軸上の点で y 座標が正である。次の問いに答えなさい。

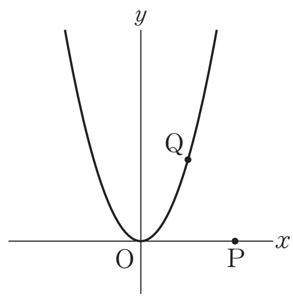
(1) △ABPにおいて，$\angle P=90°$ のとき，点Pの座標を求めよ。

(2) △ABPにおいて，$\angle A=90°$ のとき，点Pの座標を求めよ。



ステップ3　放物線と図形

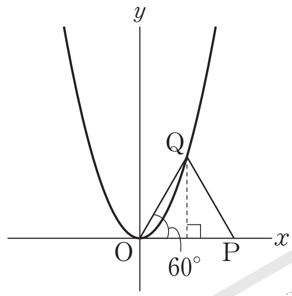
x 軸上の正の部分に点P，放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上に点Qがある。点Pの x 座標は，点Qの x 座標より大きい。
△OPQが正三角形となるような点Pの x 座標を求めなさい。



解き方　P(p, 0)とおくと，△OPQが正三角形であることから，$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}p,\ \frac{\sqrt{3}}{2}p\right)$と表される。

Qは放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上の点だから，

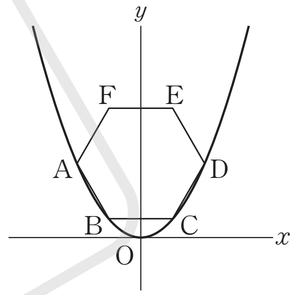
$$\frac{\sqrt{3}}{2}p=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}p\right)^2 \qquad p>0 \text{ より，} p=4\sqrt{3}$$



答　$4\sqrt{3}$

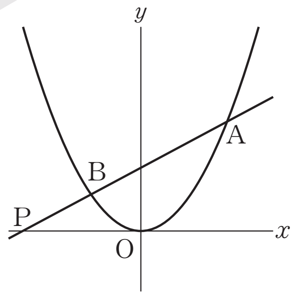
プラスワン
正三角形や正六角形の頂点の座標は60°の角をもつ直角三角形の3辺の比を利用して決めるとよい。

□ **チェック③**
右の図のように，１辺の長さが２の正六角形ABCDEFの頂点A，B，C，Dが放物線 $y=ax^2$ 上にあるとき，a の値を求めなさい。



ステップ4　放物線と相似の利用

右の図のように，放物線 $y=x^2$ 上に２点A，Bをとり，直線ABと x 軸との交点をPとする。２点A，Bの x 座標をそれぞれ a，$a-2$ とするとき，PB：BA＝1：2 になるように，a の値を定めなさい。ただし，$1<a<2$ とする。



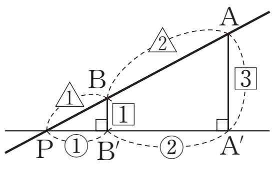
解き方　点A，Bから x 軸にそれぞれ垂線AA′，BB′を下ろすと，AA′//BB′ だから，

AA′：BB′＝PA：PB＝(1＋2)：1＝3：1

AA′＝3BB′ より，$a^2=3(a-2)^2$

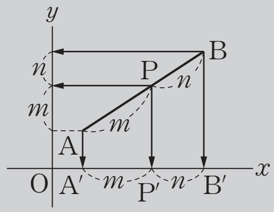
$a^2-6a+6=0$

$1<a<2$ だから，$a=3-\sqrt{3}$



答　$3-\sqrt{3}$

プラスワン
線分を分ける比は，座標軸に移し，x 座標，y 座標に直して考える。

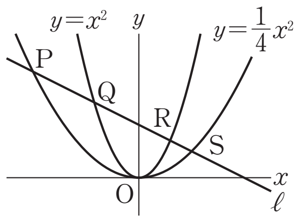


A′P′：P′B′
＝AP：PB
＝m：n

□ **チェック④**
右の図のように，直線 ℓ は放物線 $y=x^2$ と２点Q，Rで交わり，放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ と２点P，Sで交わっている。点P，Rの x 座標がそれぞれ -4，1のとき，次の問いに答えなさい。

(1)　直線 ℓ の式を求めよ。

(2)　３つの三角形の面積の比 △OPQ：△OQR：△ORS を最も簡単な整数の比で表せ。



ウォームアップ

1 2つの定点A(3, 8)，B(11, 2)がある。また，x軸上に点Pがあり，四角形APBQが平行四辺形となるように，点Qをとるとき，次の問いに答えなさい。

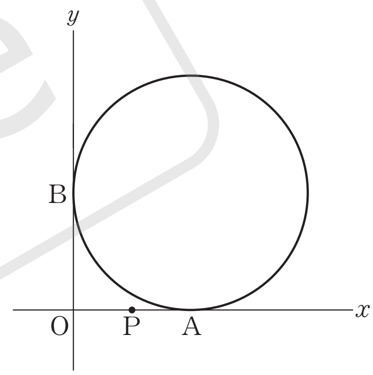
□(1) 線分ABの中点をMとするとき，点Mの座標を求めよ。

□(2) 点Pのx座標が5のとき，点Qの座標を求めよ。

□(3) $\angle APB=90^\circ$のとき，点Qの座標を求めよ。

□(4) ▱APBQの4辺の長さの和が最小となるとき，点Qの座標を求めよ。

2 x軸，y軸とそれぞれ2点A(6, 0)，B(0, 6)で接する円Cがある。点P(3, 0)と線分OB上の点Qを結ぶ直線が円Cと接するとき，次の問いに答えなさい。



□(1) △OPQの面積を求めよ。

□(2) 点R(0, 3)と線分OA上の点Sを結ぶ直線が円Cと接するとき，△OPQと△ORSが重なる部分の面積を求めよ。

3 2つの正の数a，bがあり，$a<b$である。関数$y=x^2$において，xの値がaからbまで増加するときの変化の割合が4であるとき，次の問いに答えなさい。

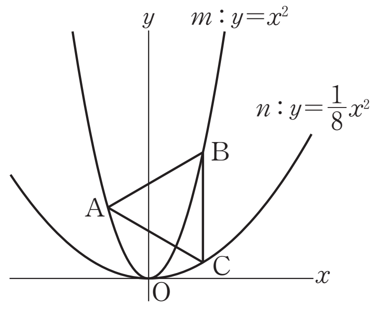
□(1) $b+a$の値を求めよ。

□(2) 関数$y=x^2$のグラフ上に2点A，Bをとり，A，Bのx座標をそれぞれa，bとする。線分ABの長さが$2\sqrt{51}$のとき，$b-a$の値を求めよ。

□(3) (2)において，2点A，Bを通る直線の式を求めよ。

□(4) (2)において，y軸上に点C(0, c)をとる。△ABCの面積が$9\sqrt{3}$のとき，cの値を求めよ。ただし，$c>0$とする。

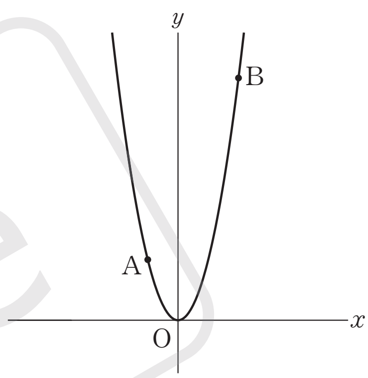
4 図のように，２つの放物線 $m：y=x^2$，$n：y=\frac{1}{8}x^2$ がある。２点A，Bを m 上にとり，点Cを n 上にとる。ただし，Aの x 座標は負，Bの x 座標は正であり，２点B，Cの x 座標は等しいとする。次の問いに答えなさい。



□(1) Bの x 座標を t とする。三角形ABCが AB＝AC の二等辺三角形となるとき，Aの座標を t を用いて表せ。

□(2) 三角形ABCが正三角形となるとき，Bの座標を求めよ。

5 右の図のように，放物線 $y=ax^2$ 上に点A(－2，4)，B(4，16)がある。また，放物線上に △AOB＝△AOC となるような点Cをとる。ただし，点Cは点Bとは異なる点とする。このとき，次の問いに答えなさい。

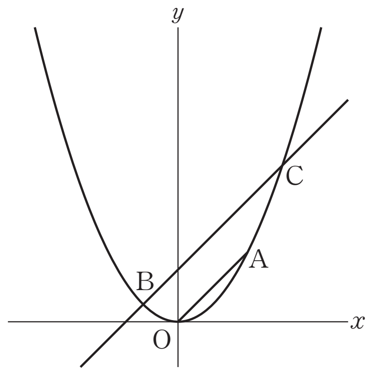


□(1) 直線ABと y 軸との交点の座標を求めよ。

□(2) 点Cの座標を求めよ。

□(3) △AOCについて，辺AOを底辺としたときの高さを求めよ。

6 右の図のように，放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ がある。放物線上に３点A，B，Cをとり，それぞれの x 座標は，4，－2，6である。次の問いに答えなさい。ただし，座標の１目盛りは１cmである。



□(1) 点Cの y 座標を求めよ。

□(2) 直線BCの方程式を求めよ。

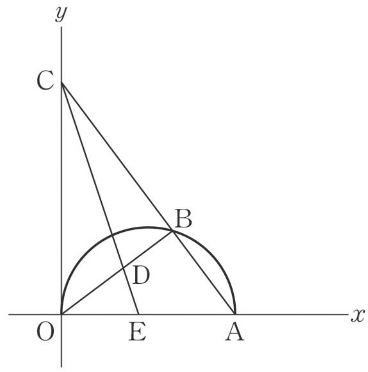
□(3) 四角形OACBの面積を求めよ。

□(4) 原点を通り四角形OACBの面積を２等分する直線の方程式を求めよ。

□(5) 直線OBと直線ACの交点をDとするとき，△OADと△BCDの面積の比を求めよ。

A 問題

1 右の図のように，x 軸上に点Aをとり，OAを直径とする半円がある。その半円上に点Bがあり，直線ABと y 軸との交点をC，∠OCAの二等分線と直線OB，x 軸との交点をそれぞれD，Eとすると，点Dの座標は(4，3)となった。次の問いに答えなさい。



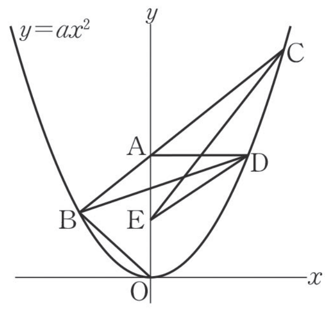
□(1) OD＝OE を証明せよ。

□(2) OCの長さを求めよ。

□(3) △OBCの面積を求めよ。

著作権者への配慮から、掲載を差し控えております。
実際の教材には掲載されておりますのでご安心ください。

3 図のように，点A (0，4) を通る直線と放物線 $y=ax^2$ の 2 つの交点をB，Cとすると，△OABは線分OAを斜辺とする直角二等辺三角形になる。点Aを通る x 軸と平行な直線と放物線の交点をDとし，線分OA上に点Eを ∠ADB＝∠BDE となるようにとる。点Bの x 座標を負として，次の問いに答えなさい。



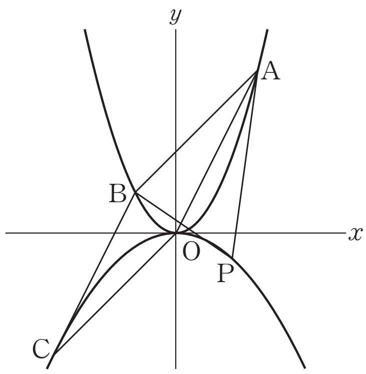
□(1) 2 点B，Dの座標および定数 a の値を求めよ。

□(2) 点Cの座標を求めよ。

□(3) 線分ABの長さと，∠ABDの大きさを求めよ。

□(4) △CEDの面積 S を求めよ。

4 右の図のように，四角形OABCは平行四辺形で，２点A，Bは放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ 上，点Cは放物線 $y=ax^2$ 上にある。２点A，Bの x 座標はそれぞれ4，-2である。また，点Pは放物線 $y=ax^2$ 上の点で，x 座標は正である。次の問いに答えなさい。



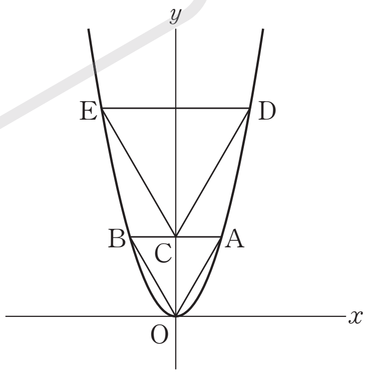
□(1) 直線ABと y 軸との交点の座標を求めよ。

□(2) a の値を求めよ。

□(3) 点Pの x 座標が3のとき，△PABの面積を求めよ。

□(4) △PABの面積と▱OABCの面積が等しいとき，点Pの x 座標を求めよ。

5 右の図のような放物線 $y=x^2$ と正三角形OABと正三角形CDEがある。ただし，点A，B，D，Eはこの放物線上にあり，点Cは辺ABと y 軸との交点とする。このとき，次の問いに答えなさい。

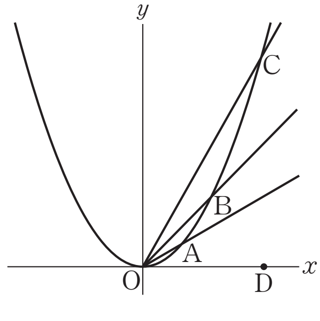


□(1) 点Aの座標を求めよ。

□(2) △OABの面積を求めよ。

□(3) 点Dの座標を求めよ。

6 ３点A，B，Cは放物線 $y=ax^2$ 上にあり，点Dは x 軸の正の部分にある。$\angle AOD=30^\circ$，$\angle BOD=45^\circ$，$\angle COD=60^\circ$，$a>0$ であるとき，次の問いに答えなさい。



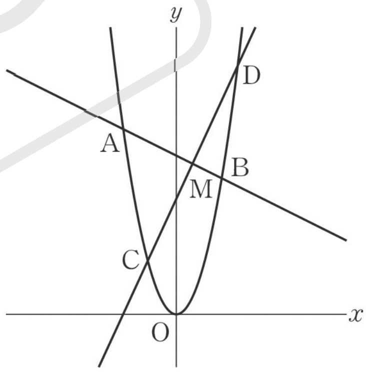
□(1) ３点A，B，Cの座標を a を用いて表せ。

□(2) 三角形BOCの面積が1のとき，三角形AOBの面積を求めよ。

B 問　題

著作権者への配慮から、掲載を差し控えております。
実際の教材には掲載されておりますのでご安心ください。

2 右の図のように，３つの関数 $y=2x^2$，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{21}{4}$，$y=2x+k$ のグラフが点A，B，C，D，Mで交わっている。点Mが線分CDの中点であるとき，次の問いに答えなさい。ただし，座標軸の１目盛りを１cmとする。

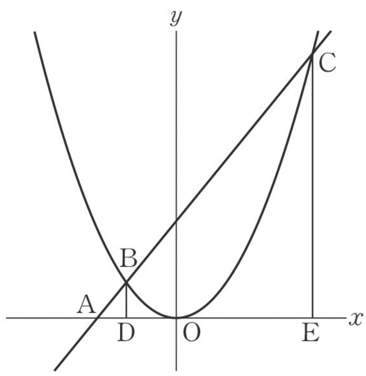


□(1)　k の値を求めよ。

□(2)　△BCDの面積を求めよ。

□(3)　点Bと y 軸について対称な点をEとする。直線 $y=ax$ が放物線 $y=2x^2$ の点Eから点Bまでの部分と直線DEと直線DBで囲まれた図形の面積を２等分するとき，a の値を求めよ。

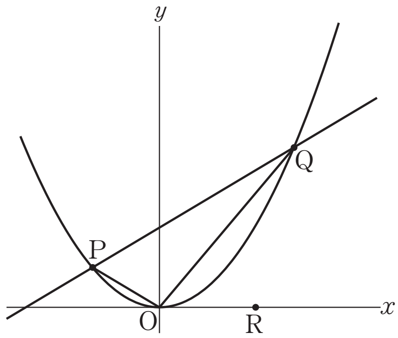
3 右の図のように，２次関数 $y=ax^2$ $(a>0)$ のグラフと，A$(-1,\ 0)$を通る傾きが正の直線がB，Cで交わっており，AB：BC=1：24 である。B，Cから x 軸に引いた垂線と x 軸との交点をそれぞれD，Eとするとき，次の問いに答えなさい。



□(1)　Dの x 座標を求めよ。

□(2)　O，E，C，Bが１つの円周上にあるとき，a の値を求めよ。

4 図のように，放物線 $C : y=\frac{9}{25}x^2$ と直線 $y=\frac{3}{5}x+2$ は２点P，Qで交わっている。また，x 軸上に点 $\mathrm{R}\left(\frac{7}{3},\ 0\right)$ がある。このとき，次の問いに答えなさい。

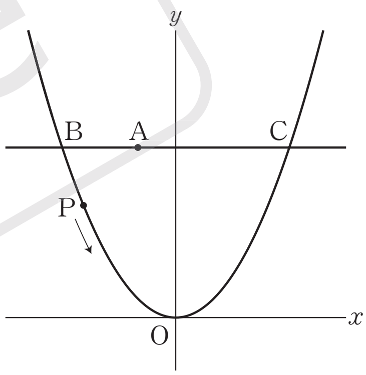


□(1)　２点P，Qの座標をそれぞれ求めよ。

□(2)　点O以外の C 上の点で，△OPQと△SPQの面積が等しくなるような点Sは３つある。このうち，x 座標が２番目に大きい点Sの座標を求めよ。

□(3)　３点P，Q，Rを通る円を D とするとき，D 上の点で(2)の点Sから最も遠いところにある点をTとする。このとき，直線STの方程式を求めよ。

5 右の図のような放物線 $y=\frac{1}{4}x^2$ において，点A$(-2,\ 9)$を通り，x 軸に平行な直線を引く。放物線と直線の交点Bの x 座標は負，Cの x 座標は正で，点Pは放物線上をBからCまで動くとき，次の問いに答えなさい。

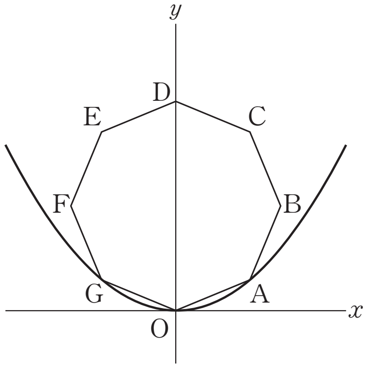


□(1)　点Cの座標を求めよ。

□(2)　AP＝CP となるとき，点Pの座標を求めよ。

□(3)　点Qを放物線上のOとBの間にとり，(2)の点Pと点Aとの距離が AQ＝PQ となるとき，点Qの座標を求めよ。

6 $y=x^2$ のグラフがあり，右の図のように，正八角形OABCDEFGの３つの頂点O，A，Gがこのグラフ上にある。次の問いに答えなさい。



□(1)　点Aの x 座標を求めよ。

□(2)　直線EFの方程式を求めよ。

□(3)　直線EFが y 軸と交わる点をP，x 軸と交わる点をQとする。△AEFの面積は△OPQの面積の何倍か。