

第3講

複素数と方程式(1) 複素数

学習のポイント

1 虚数単位

実数は平方しても負になることなく

$$(\text{実数})^2 \geq 0$$

である。これに対して、平方して負となる数を考える。

平方して -1 となる新しい数を1つ考え、それを文字 i で表す。この i を虚数単位という。すなわち

$$i^2 = \text{①}$$

である。

2 複素数

虚数単位 i と実数 a, b を用いて

$$a+bi$$

の形で表される数を考える。このような数を複素数という。

(ア) $a=2, b=3$ のときの $2+\text{②}$ i

(イ) $a=-3, b=0$ のときの -3

(ウ) $a=0, b=-5$ のときの ③ i

などはいずれも複素数である。

(イ)のように、 $b=0$ のときは実数 a を表す。

これに対して、(ア), (ウ)のように、 $b \neq 0$ のときは ④ という。

$$\text{複素数 } a+bi \begin{cases} \text{実数} & (b=0) \\ \text{④} & (b \neq 0) \end{cases}$$

特に、(ウ)のように、 $a=0, b \neq 0$ のときは純虚数という。

また、複素数 $a+bi$ の a を実部、 b を虚部という。

例 $5-4i$ の実部は ⑤ 、虚部は ⑥ である。

3 複素数の相等

2つの複素数が等しいとは、実部と虚部がそれぞれ等しいことである。

すなわち、 a, b, c, d を実数とすると

$$a+bi=c+di \iff a=\text{⑦} \text{ かつ } b=\text{⑧}$$

特に、 $a+bi=0 \iff a=b=\text{⑨}$

例 等式 $p-3i=5+qi$ を満たす実数 p, q の値は

$$p=\text{⑩}, q=\text{⑪} \text{ である。}$$

↔ 複素数の分類

複素数 $a+bi$

実数 a ($b=0$)	虚数 $a+bi$ ($b \neq 0$)
	純虚数 bi ($a=0$)

↔ 虚部についての注意

虚部は b であって bi ではない。

虚部 b は実数である。

$$\leftrightarrow 0=0+0i$$

解答

- ① -1 ② 3 ③ -5 ④ 虚数 ⑤ 5 ⑥ -4 ⑦ c ⑧ d ⑨ 0
⑩ 5 ⑪ -3

4 複素数の加法・減法

2つの複素数 $a+bi$ と $c+di$ の和と差は、次のように計算する。

$$\text{和: } (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$\text{差: } (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$$

$$\text{例 } (3+4i) + (2-5i) = (3+2) + (\text{①} - 5)i = \text{②}$$

$$(3+4i) - (2-5i) = (\text{③} - 2) + (4+5)i = \text{④}$$

5 複素数の乗法

2つの複素数 $a+bi$ と $c+di$ の積は、次のように計算する。

$$\begin{aligned} \text{積: } (a+bi)(c+di) &= ac + (ad+bc)i + bdi^2 \\ &= ac + (ad+bc)i + bd \cdot (-1) \\ &= (ac-bd) + (ad+bc)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 } (3+4i)(2-5i) &= 6 - \text{⑤}i - 20i^2 \\ &= 6 - \text{⑤}i - 20 \cdot (\text{⑥}) \\ &= \text{⑦} \end{aligned}$$

6 共役な複素数

複素数 $a+bi$ に対して、 $a-bi$ を a と共役な複素数といい、 \bar{a} で表す。

$$\text{例 } a = -4+5i \text{ と共役な複素数は } \bar{a} = \text{⑧} \text{ である。}$$

実数 a と共役な複素数は a 自身である。

共役な複素数の和と積は実数となる。

7 複素数の除法

2つの複素数 $a+bi$ と $c+di$ の商については

分母と分子に、分母と共役な複素数をかけて、分母を実数で表す。

$$\begin{aligned} \text{商: } \frac{a+bi}{c+di} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac-adi+bc-i-bdi^2}{c^2-d^2i^2} \\ &= \frac{ac + (-ad+bc)i - bd \cdot (-1)}{c^2 - d^2 \cdot (-1)} \\ &= \frac{(ac+bd) + (-ad+bc)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 } \frac{3+4i}{2-5i} &= \frac{(3+4i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{6 + \text{⑨}i + 20i^2}{\text{⑩} - 25i^2} \\ &= \frac{6 + \text{⑨}i + 20 \cdot (\text{⑪})}{\text{⑩} - 25 \cdot (\text{⑫})} = \frac{\text{⑬}}{\text{⑭}} + \frac{\text{⑮}}{\text{⑯}}i \end{aligned}$$

4, 5, 7 のように、複素数の四則演算の結果は複素数となる。

↔ i を x や y のような文字と同じように取り扱えばよい。

↔ i を x や y のような文字と同じように取り扱い、 i^2 が現れたら -1 に置き換える。

注意
 b は負のこともあるので注意すること。

↔ \bar{a} は a バーと読む。

$$\begin{aligned} \leftrightarrow (a+bi) + (a-bi) &= 2a \\ (a+bi)(a-bi) &= a^2 - b^2i^2 \\ &= a^2 - b^2 \cdot (-1) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

↔ $2-5i$ と共役な複素数は、 $2+5i$ である。

解答 ① 4 ② $5-i$ ③ 3 ④ $1+9i$ ⑤ 7 ⑥ -1 ⑦ $26-7i$ ⑧ $-4-5i$
⑨ 23 ⑩ 4 ⑪ -1 ⑫ -1 ⑬ $-\frac{14}{29}$ ⑭ $\frac{23}{29}$

8 実数と複素数の類似点と相違点

複素数には実数と同じような計算法則が成り立つ。

例えば、 $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ (加法についての結合法則)

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma \quad (\text{分配法則})$$

などである。さらに

$$\alpha\beta=0 \iff \alpha=0 \text{ または } \beta=\boxed{1} \quad \dots\dots*$$

も成り立つ。

しかし、実数とは異なり、虚数については大小関係や正負は考えない。

9 負の数の平方根

8の*を用いて、負の数の平方根を考える。

$a>0$ のとき、 $-a=(\sqrt{a}i)^2$ と表すことができ

$$x^2+a=x^2-(\sqrt{a}i)^2=(x+\sqrt{a}i)(x-\boxed{2})$$

と因数分解できるから、*より、 $x^2+a=0$ 、すなわち、 $x^2=-a$ の解は

$$x=\pm\sqrt{a}i$$

である。すなわち、 $a>0$ のとき、 $-a$ の平方根は $\pm\sqrt{a}i$ である。

例 -3 の平方根は $\boxed{3}$ である。

10 負の数の平方根の計算

負の数の平方根については、 $\sqrt{-2}$ のように、根号内に負の数を入れる表記があり

$$a>0 \text{ のとき、 } \sqrt{-a}=\sqrt{a}i \quad \text{特に、} \sqrt{-1}=i$$

と定める。

$a>0, b>0$ のとき、 $\sqrt{-a}$ や $\sqrt{-b}$ についての計算では

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}i, \quad \sqrt{-b}=\sqrt{b}i$$

と根号内を正の数に直して

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}, \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

などを用いて計算する。

例 (1) $\sqrt{-2} + \sqrt{-8} = \sqrt{2}i + \boxed{4} = \boxed{5}$

(2) $\sqrt{-2} \times \sqrt{-8} = \sqrt{2}i \times \boxed{4} = \boxed{6}$

(3) $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-8}} = \frac{\sqrt{2}i}{\boxed{4}} = \boxed{7}$

(4) $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}i}{2\sqrt{2}} = \boxed{8}$

(5) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-8}} = \frac{\sqrt{2}}{\boxed{4}} = \boxed{9}$

(注) $a>0, b>0$ のとき、 $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{ab}$ 、 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}=\sqrt{-\frac{a}{b}}$ は成り立たない。

↔ α, β, γ はギリシャ文字で、それぞれ「アルファ」「ベータ」「ガンマ」と読む。

↔ すなわち、虚数については不等号は使えない。

↔ a の平方根とは、平方して a となる数 (a が負でも同じ) である。

↔ $(\sqrt{a})^2=a, i^2=-1$

↔ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

↔ この表記を用いると、 $a>0$ のとき、 $-a$ の平方根は $\pm\sqrt{-a}$ と表される。

注意
根号内が負の数のときは、 i を用いて、根号内を正の数にしてから計算する。
 $\sqrt{-2} \times \sqrt{-8}$
 $=\sqrt{(-2) \times (-8)}$
と計算しないこと。

↔ $\frac{1}{i} = \frac{-i}{i \cdot (-i)} = \frac{-i}{-i^2} = -i$

解答

- ① 0 ② $\sqrt{a}i$ ③ $\pm\sqrt{3}i$ ④ $2\sqrt{2}i$ ⑤ $3\sqrt{2}i$ ⑥ -4 ⑦ $\frac{1}{2}$ ⑧ $\frac{1}{2}i$ ⑨ $-\frac{1}{2}i$

ヒント

↔ 0 について

$$0 = 0 + 0i$$

ターゲット1-1の答

1 c 2 b 3 a

↔ 実部・虚部

$a+bi$ において

実部は a ，虚部は b
虚数となるとき， $b \neq 0$

ターゲット1-2の答

1 4 2 -7
3 $4-x$ 4 $x \neq 4$

ターゲット1-1 [複素数(1)] → 1, 2

次の数は， a ：実数， b ：純虚数， c ：純虚数でない虚数 のいずれか，記号で答えよ。

- (1) $3-2i$ (2) $\sqrt{7}$ (3) $-\frac{3}{2}i$ (4) 0 (5) $\sqrt{5}i-2$

解答

それぞれ，実部，虚部が0かどうかを確かめる。

- (1) (2) a (3) (4) (5) c

ターゲット1-2 [複素数(2)] → 1, 2

x を実数とするとき，次の複素数の実部と虚部を求めよ。また，(2)は虚数となるための x の条件を求めよ。

- (1) $4-7i$ (2) $3x-2+(4-x)i$

解答

- (1) 実部は ，虚部は
 (2) 実部は $3x-2$ ，虚部は
 虚数となるための条件は

トレーニング

TRAINING

1 次の数のうち，(1)~(3)にあてはまるものをすべて答えよ。

$$1+2i, \quad \sqrt{5}, \quad -4i, \quad 7, \quad i^2$$

- (1) 実数 (2) 虚数 (3) 純虚数

2 x を実数とするとき，次の複素数の実部と虚部を求めよ。また，(5)，(6)は虚数となるための x の条件を求めよ。

- (1) $4+3i$ (2) $-1+5i$ (3) $3i$

- (4) -5 (5) $7x+4+(2-x)i$ (6) $x-6+(2x+5)i$

3 a を実数とする。複素数 $\alpha = a+3+(a-2)i$ について，次の問いに答えよ。

- (1) α が実数となるための a の値を求めよ。

- (2) α が虚数となるための a の条件を求めよ。

夕→グット2 [複素数の相等] →3

次の等式を満たす実数 p , q の値を求めよ。

(1) $p+qi=-4+3i$ (2) $(p+2)+(p+q)i=q+12i$

解答

複素数の相等条件を用いる。

(1) $p=$, $q=$

(2) $p+2=$, $p+q=$

よって, $p=$, $q=$

ヒント

↔ 複素数の相等条件

a, b, c, d を実数とすると

$$a+bi=c+di$$

$$\iff a=c \text{ かつ } b=d$$

夕→グット2の答

1	-4	2	3	3	q
4	12	5	5	6	7

トレーニング

TRAINING

4 次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。

□(1) $x+yi=5-4i$

□(2) $x+2yi=4-xi$

□(3) $(x+1)+(x-y)i=2y+i$

□(4) $(2x-y)+(x+y-3)i=-1+4i$

夕→グット3 [複素数の加法・減法] →4

次の計算をせよ。

(1) $(2-3i)+(4+7i)$ (2) $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}i\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}i\right)$

解答

(1) $(2-3i)+(4+7i)=(2+) + (-3+)i$
 $= + i$

(2) $\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}i\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}i\right)=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+$ $\right)i=$

ヒント

↔ i は文字のように取り扱えばよい。

夕→グット3の答

1	4	2	7	3	6
4	4	5	$\frac{1}{6}$		
6	$\frac{3}{20}$	$+\frac{1}{2}i$			

トレーニング

TRAINING

5 次の計算をせよ。

□(1) $(4+3i)+(1-2i)$

□(2) $(3+i)+(2+5i)$

□(3) $(-1+4i)-(3+i)$

□(4) $(7-2i)+(-4+2i)$

□(5) $(5-3i)-(6+5i)$

□(6) $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{12}i\right)$

ターゲット4 [複素数の乗法] → 5

次の計算をせよ。

(1) $(1+i)(3-i)$ (2) $(4-3i)^2$

解答

$$(1) (1+i)(3-i) = 3 + \boxed{1}i - i^2 = 3 + \boxed{1}i - (\boxed{2})$$

$$= \boxed{3} + \boxed{1}i$$

$$(2) (4-3i)^2 = 16 - 24i + \boxed{4}i^2 = 16 - 24i + \boxed{4} \cdot (\boxed{5})$$

$$= \boxed{6}$$

ヒント

↔ i を文字のように取り扱ひ、 i^2 が現れたら -1 に置き換える。

ターゲット4の答

1	2	2	-1	3	4
4	9	5	-1		
6	7-24i				

トレーニング

TRAINING

6 次の計算をせよ。

□(1) $1+i+i^2$ □(2) i^4

7 次の計算をせよ。

□(1) $(2+i)(3+2i)$ □(2) $(4+3i)(2-5i)$
 □(3) $(6-i)(-2+3i)$ □(4) $(5-3i)(4-i)$
 □(5) $(3-i)^2$ □(6) $(1+i)^2$
 □(7) $(2+3i)^2$ □(8) $(1-i)^3$

ターゲット5 [複素数の除法] → 6, 7

次の計算をせよ。

(1) $\frac{3}{i}$ (2) $\frac{4-3i}{1+i}$

解答

$$(1) \frac{3}{i} = \frac{3 \cdot (\boxed{1})}{i \cdot (\boxed{1})} = \frac{\boxed{2}}{-i^2} = -\frac{\boxed{2}}{(\boxed{3})} = \boxed{4}$$

$$(2) \frac{4-3i}{1+i} = \frac{(4-3i)(\boxed{5})}{(1+i)(\boxed{5})} = \frac{4 - \boxed{6}i + \boxed{7}i^2}{1 - i^2}$$

$$= \frac{4 - \boxed{6}i + \boxed{7} \cdot (\boxed{8})}{1 - (\boxed{9})} = \frac{\boxed{10}}{\boxed{11}} - \boxed{11}i$$

ヒント

↔ 分母と分子に、分母と共役な複素数をかける。

(1)では $-i$, (2)では $1-i$

ターゲット5の答

1	$-i$	2	$-3i$
3	-1	4	$-3i$
5	$1-i$	6	7
7	3	8	-1
9	-1	10	$\frac{1}{2}$
11	$\frac{7}{2}$		

8 次の複素数と共役な複素数を答えよ。

□(1) $4+3i$

□(2) $5-2i$

□(3) $6i$

□(4) 7

9 複素数 $\alpha=1-3i$ と共役な複素数 $\bar{\alpha}$ を答えよ。また、 α と $\bar{\alpha}$ の和、積をそれぞれ求めよ。

10 次の計算をせよ。

□(1) $\frac{1}{i}$

□(2) $\frac{3+i}{i}$

□(3) $\frac{i}{1+i}$

□(4) $\frac{1+i}{2-3i}$

□(5) $\frac{2-i}{3+i}$

□(6) $\frac{4+3i}{-1+2i}$

ターゲット6-1 [実数と複素数] →8

次の問いに答えよ。

- (1) a, b が実数のとき、 $a^2+b^2=0$ を成り立たせる a, b の値を求めよ。
 (2) $\alpha=2+3i, \beta=p+qi$ (p, q は実数) のとき、
 $\alpha\bar{\alpha}, \beta\bar{\beta}$ が実数となることを利用して、 $\alpha\beta=0$ のときの p, q の値を求めよ。

ヒント

解答

(1) a, b は実数であるから、 $a^2 \geq 0, b^2 \geq 0$

よって、 $a^2+b^2 \geq$ (等号成立は、 $a=b=0$ に限る。)

ゆえに、 $a^2+b^2=0$ ならば、 $a=$, $b=$

(2) $\alpha\bar{\alpha}=(2+3i)(2-3i)=$ ①

$\beta\bar{\beta}=(p+qi)(p-qi)=$ ②

$\alpha\beta=0$ の両辺に $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ をかけると、 $\alpha\bar{\alpha}\cdot\beta\bar{\beta}=0$

①, ②より、 4 (5) $=0$ 5 $=0$

(1)より、 $p=$, $q=$

ターゲット6-2 [負の数の平方根] →9

次の数の平方根を求めよ。

(1) -36

(2) -125

解答

(1) $\pm\sqrt{36}i=$

(2) $\pm\sqrt{125}i=$

ターゲット6-1の答

1	0	2	0	3	0
4	13	5	p^2+q^2		
6	0	7	0		

↔ $a>0$ のとき、 $-a$ の平方根は、 $\pm\sqrt{a}i$

ターゲット6-2の答

1	$\pm 6i$	2	$\pm 5\sqrt{5}i$
---	----------	---	------------------

11 次の数を i を用いて表せ。

- (1) $\sqrt{-2}$ □(2) $\sqrt{-5}$ □(3) $\sqrt{-9}$
 □(4) $\sqrt{-25}$ □(5) $\sqrt{-56}$ □(6) $\sqrt{-27}$

12 次の数の平方根を求めよ。

- (1) 7 □(2) 36 □(3) -10
 □(4) -15 □(5) -16 □(6) -49
 □(7) -18 □(8) -72

ターゲット7 [負の数の平方根の計算] → 10

次の計算をせよ。

- (1) $\sqrt{-2} \times \sqrt{-32}$ (2) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{-5}}$ (3) $(\sqrt{-3} + 2)^2$

ヒント

↔ 根号内が負の数のとき
 $\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$ ($a > 0$)
 として計算する。

↔ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ターゲット7の答

- 1 -8 2 $\sqrt{5}i$
 3 3 4 $-3i$ 5 3
 6 1

解答

- (1) $\sqrt{-2} \times \sqrt{-32} = \sqrt{2}i \times 4\sqrt{2}i =$
 (2) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{-5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\text{2}} = \frac{\text{3}}{i} =$
 (3) $(\sqrt{-3} + 2)^2 = (\sqrt{3}i + 2)^2 =$ $i^2 + 4\sqrt{3}i + 4 =$ $+ 4\sqrt{3}i$

13 次の計算をせよ。

- (1) $\sqrt{-20} + 3\sqrt{-45}$ □(2) $4\sqrt{-12} - \sqrt{-48}$
 □(3) $\sqrt{-3} \times \sqrt{5}$ □(4) $\sqrt{-2} \times \sqrt{-6}$
 □(5) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}$ □(6) $\frac{\sqrt{-32}}{\sqrt{-2}}$
 □(7) $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{12}}$ □(8) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{-12}}$
 □(9) $(\sqrt{-2} + 1)^2$ □(10) $(\sqrt{-5} - 2)^2$

まとめの問題

1 次の問いに答えよ。

(1) 次の数のうち、①～③にあてはまるものをすべて答えよ。

$$3-i, \quad \sqrt{30}, \quad -1+2i, \quad -10, \quad \sqrt{5}i$$

① 実数

② 虚数

③ 純虚数

(2) x を実数とするとき、次の複素数の実部と虚部を求めよ。また、③は虚数となるための x の条件を求めよ。

① $5+7i$

② $-2+8i$

③ $3x-1+(x+4)i$

2 次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。

(1) $x+3i=7+yi$

(2) $(x-y)+(2x+y)i=4+5i$

3 次の計算をせよ。

(1) $(-5+4i)+(2-7i)$

(2) $(4+i)+(-5+2i)$

(3) $(2-5i)-(6+3i)$

(4) $(-1+7i)-(8-5i)$

4 次の計算をせよ。

(1) $1+i+i^2+i^3$

(2) i^6

(3) $(4+i)(-1+2i)$

(4) $(5-3i)(2+7i)$

(5) $(3-2i)^2$

(6) $(2-i)^3$

5 次の複素数と共役な複素数を答えよ。

(1) $-5+2i$

(2) $3-8i$

(3) 6

(4) $-4i$

6 次の計算をせよ。

(1) $\frac{1-2i}{i}$

(2) $\frac{5i}{2+i}$

(3) $\frac{3+i}{1+2i}$

(4) $\frac{1+2i}{4-3i}$

7 次の問いに答えよ。

(1) 次の数を i を用いて表せ。

① $\sqrt{-7}$

② $\sqrt{-16}$

(2) 次の数の平方根を求めよ。

① -9

② -20

8 次の計算をせよ。

(1) $-\sqrt{-32}+2\sqrt{-8}$

(2) $\sqrt{-24}-2\sqrt{-54}$

(3) $\sqrt{8}\times\sqrt{-2}$

(4) $\sqrt{-7}\times\sqrt{-14}$

(5) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{-5}}$

(6) $\frac{\sqrt{-24}}{\sqrt{-6}}$

(7) $(3+\sqrt{-2})^2$

(8) $(5-\sqrt{-4})^2$