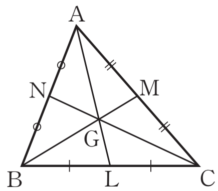
第1講　図形の性質(1)　三角形の性質

学習のポイント

1　三角形の重心



右図の△ABCで，３本の中線AL，BM，［❶　　］は１点Gで交わり，この点Gを三角形の［❷　　］という。

この点Gは，中線ALを［❸　　］:１に内分する。

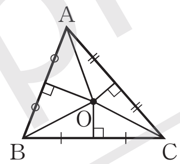
すなわち

AG：GL＝［❸　　］：1

また，同様に，中線BM，［❶　　］を［❸　　］:１に内分する。

このように，三角形の３本の中線は１点で交わり，この交点は各中線を２:１に内分する。

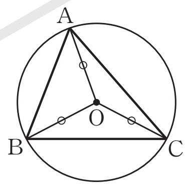
2　三角形の外心



右図の△ABCで，３辺BC，CA，ABの垂直二等分線は，１点Oで交わる。

点Oは辺BCの垂直二等分線上にあるから

OB＝［❹　　］



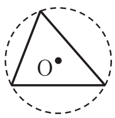
同様に，OC＝OA，OA＝［❺　　］であるから，点Oは３頂点A，B，Cから等距離にある。

よって，点Oを中心として，３頂点A，B，Cを通る円をかくことができる。この３頂点を通る円を，三角形の［❻　　］といい，その中心Oを［❼　　］という。

このように，三角形の３辺の垂直二等分線は１点で交わり，この交点が三角形の［❼　　］である。

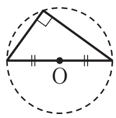
三角形の［❼　　］は，三角形の形状によって次のような位置にある。

(i)　鋭角三角形



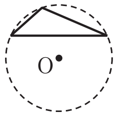
内部

(ii)　直角三角形



斜辺の中点

(iii)　鈍角三角形

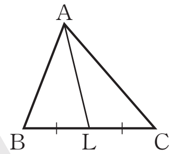


外部

point

中線

三角形の１つの頂点とそれに向かい合う辺の中点とを結ぶ線分。



内分と外分

m，n を正の実数とする。

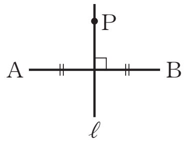
点Pが線分AB上にあって，AP：PB＝m：n が成り立つとき，点Pは線分ABを m：n に内分するという。

点Qが線分ABの延長上にあって，AQ：QB＝m：n が成り立つとき，点Qは線分ABを m：n に外分するという。

point

垂直二等分線

１つの線分の中点を通り，これに垂直な直線。



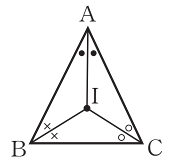
垂直二等分線 ℓ 上の点Pについて

PA＝PB

が成り立つ。

解答　❶ CN　❷ 重心　❸ 2　❹ OC　❺ OB　❻ 外接円　❼ 外心

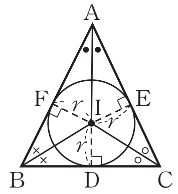
3 三角形の内心



右図の△ABCで，３つの内角∠A，∠B，∠Cの二等分線は１点Ｉで交わる。

点Ｉから３辺BC，CA，ABに垂線ID，IE，IFを下ろすと，△CID≡△ ❶ より，ID＝ ❷

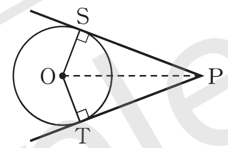
同様に，ID＝IF であり，ID＝ ❷ ＝IF



よって，点Ｉを中心として，３点D，E，Fを通る円をかくことができる。この円は，△ABCの３辺に点D，E，Fで接している。この円を，三角形の ❸ といい，その中心Ｉを ❹ という。

このように，三角形の３つの内角の二等分線は１点で交わり，この交点が三角形の ❹ である。

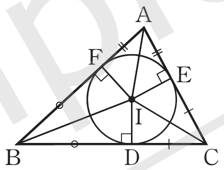
4 接線の長さと内接円



円Oの外部にある点Pから，円Oに接線PS，PTをひくと，△POS≡△POT より，

PS＝ ❺ となる。このPS， ❺ の長さをPからの接線の長さという。

↔ △POSと△POTで
OS＝OT（＝半径）
∠PSO＝∠PTO＝90°
POは共通
ゆえに，△POS≡△POT

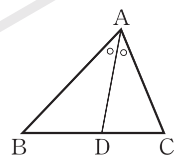


右図のように，円が△ABCに内接するとき，

AF＝AE，BD＝ ❻ ，CE＝ ❼ である。

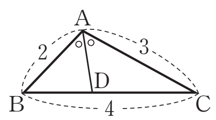
5 角の二等分線と比

(1) △ABCにおいて，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとすると，BD : DC＝AB : ACが成り立つ。



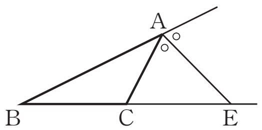
例 AB＝2，BC＝4，CA＝3 の△ABCで，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとすると

BD : DC＝2 : ❽ より，BD＝ ❾



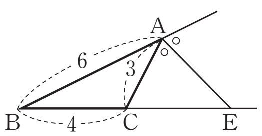
↔ BD＝$\dfrac{2}{2+3}$・BC

(2) AB≠ACである△ABCの頂点Aにおける外角の二等分線と辺BCの延長との交点をEとすると，BE : EC＝AB : ACが成り立つ。



例 AB＝6，BC＝4，CA＝3 の△ABCで，頂点Aの外角の二等分線と辺BCの延長との交点をEとすると

BE : EC＝ ❿ : 1 より，EC＝ ⓫



↔ BC : CE＝1 : 1

解答 ❶ CIE ❷ IE ❸ 内接円 ❹ 内心 ❺ PT ❻ BF ❼ CD ❽ 3 ❾ $\dfrac{8}{5}$ ❿ 2 ⓫ 4

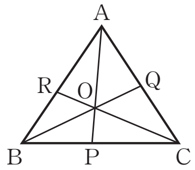
6 チェバの定理・メネラウスの定理

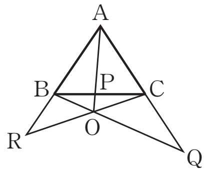
(1) チェバの定理

△ABCとその辺上にない点Oにおいて，直線AO，BO，COが，辺BC，CA，ABと，それぞれ点P，Q，Rで交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\boxed{❶\quad}$$

このチェバの定理は，右図のように，点Oが△ABCの外部にある場合にも成り立つ。





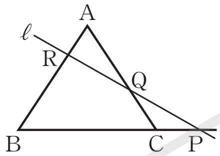
⇔ **チェバの定理の公式**

BP，PC，CQ，QA，AR，RBとしりとりするように左から書いていくと公式ができあがる。

(2) メネラウスの定理

△ABCとその頂点を通らない直線ℓにおいて，直線ℓが△ABCの3辺BC，CA，ABまたはその延長と，それぞれ点P，Q，Rで交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\boxed{❷\quad}$$



⇔ チェバの定理の公式と式の形は同じである。

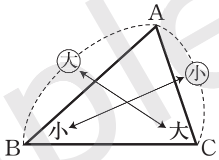
7 三角形の辺と角の大小

△ABCにおいて，AB＞AC ⟺ ∠C＞∠B

すなわち

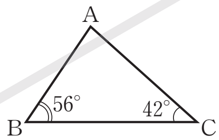
(1) 大きい辺に対する角は，小さい辺に対する角よりも $\boxed{❸\quad}$。

(2) 大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺よりも $\boxed{❹\quad}$。



例 右図で，∠B＝56°，∠C＝42° のとき

AB $\boxed{❺\quad}$ AC が成り立つ。



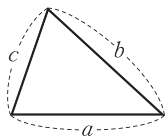
⇔ ∠B＞∠Cより，ACとABの大小関係を考える。

8 三角形の成立条件

正の数a，b，cを3辺の長さとする三角形が存在するための条件は

$$\begin{cases} a<b+c \\ b<c+a \quad \cdots\cdots ① \\ c<a+b \end{cases}$$

である。すなわち，三角形の2辺の長さの和は，残りの1辺の長さより $\boxed{❻\quad}$。



⇔ ①の3つの式を1つの式にまとめると

$$|a-b|<c<a+b$$

また，a，b，cの中でaが最大であれば，三角形が存在するための条件は，$a<b+c$である。

例 長さx，4，7の3つの線分を3辺とする三角形が存在するxの範囲は

$\boxed{❼\quad}<4+7$，$\boxed{❽\quad}<4+x$

より，$\boxed{❾\quad}<x<\boxed{❿\quad}$ である。

⇔ $4<7$ と $x>0$ より

$4<x+7$

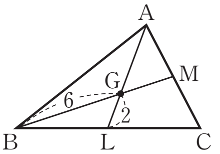
は成り立つので除いた。

解答 ❶ 1　❷ 1　❸ 大きい　❹ 大きい　❺ ＜　❻ 大きい　❼ x　❽ 7　❾ 3　❿ 11

ターゲット１ ［三角形の重心］ ➡１

右図で，点Gは△ABCの重心である。GL＝2，BG＝6のとき，次の長さを求めよ。

(1) AG　　(2) BM



解答

(1) 点Gは△ABCの重心であるから，AG：GL＝①[　　]：②[　　]より

AG：2＝①[　　]：②[　　]

よって，AG＝③[　　]

(2) また，BG：BM＝2：④[　　]より

6：BM＝2：④[　　]

よって，BM＝⑤[　　]

ヒント

↔ BG：GM＝2：1

ターゲット１の答

①	2	②	1	③	4
④	3	⑤	9		

トレーニング TRAINING

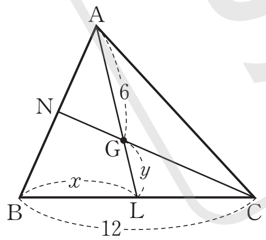
1 次の点を下の図に図示せよ。

□(1) 線分ABを5：3に内分する点P　　□(2) 線分BAを3：1に内分する点Q

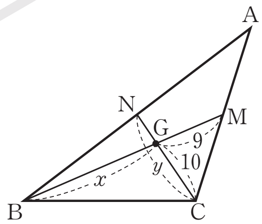
□(3) 線分ABを9：1に外分する点R　　□(4) 線分ABを1：5に外分する点S

2 次の図で，点Gは△ABCの重心である。次の長さx，yを求めよ。

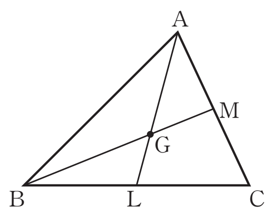
□(1)



□(2)



□**3** 右図で，点Gは△ABCの重心である。面積比△ABC：△AGMを求めよ。

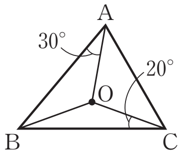


□**4** △ABCにおいて，2辺AB，ACの中点をそれぞれD，E，BEとCDの交点をGとする。また，Gを通り辺BCに平行な直線と2辺AB，ACとの交点をそれぞれF，Hとするとき，DE：FHを求めよ。

ターゲット2 ［三角形の外心］ ➡2

右図で，点Oは△ABCの外心である。∠OAB＝30°，∠OCB＝20°のとき，次の角の大きさを求めよ。

(1) ∠ABC　　　(2) ∠OAC



解答

(1) 点Oは△ABCの外心であるから，OA＝OB＝［①］より，△OAB，△OBCは二等辺三角形である。

△OABにおいて，２つの底角は等しいから

∠OBA＝∠OAB＝［②］°

△OBCにおいて，同様に

∠OBC＝∠OCB＝［③］°

よって，∠ABC＝∠OBA＋∠OBC＝［④］°

(2) OA＝OCより，△OCAは二等辺三角形であるから

∠OCA＝∠［⑤］

△ABCの内角の和は180°であるから

30°×2＋［⑥］°×2＋2∠OAC＝180°

よって，∠OAC＝［⑦］°

ヒント

↔ **外心の性質**

外心Oは，辺AB，BC，CAの垂直二等分線の交点であるから，３頂点A，B，Cから等距離にある。

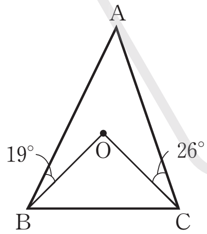
ターゲット2の答

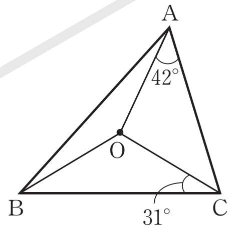
① OC　② 30
③ 20　④ 50
⑤ OAC　⑥ 20
⑦ 40

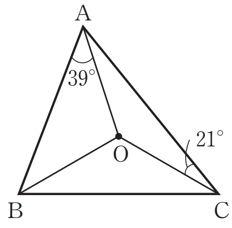
トレーニング TRAINING

5 次の図で，点Oは△ABCの外心である。次の角の大きさを求めよ。

□(1) ∠BAC　　□(2) ∠OBA　　□(3) ∠BOC

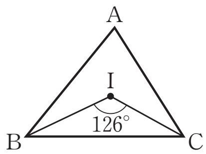






ターゲット3 ［三角形の内心］ ➡3

右図で，点Ｉは△ABCの内心である。
∠BIC＝126°のとき，∠BACの大きさを求めよ。



解答

△BICで，∠IBC＋∠ICB＝180°－［①］°＝［②］°

△ABCで，∠BAC＝180°－2(∠IBC＋∠［③］)

＝180°－2×［②］°＝［④］°

ヒント

↔ 三角形の内角の和は180°

↔ ∠ABC＋∠ACB
＝2∠IBC＋2∠ICB

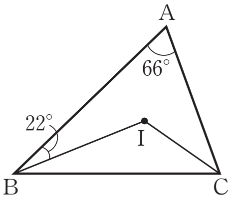
ターゲット3の答

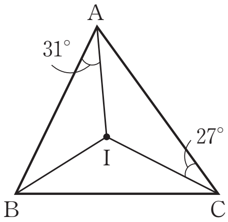
① 126　② 54
③ ICB　④ 72

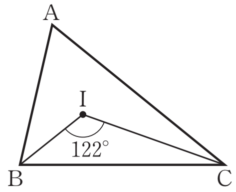
トレーニング TRAINING

6 次の図で，点 I は△ABCの内心である。次の角の大きさを求めよ。

□(1)　∠ICA　　□(2)　∠BIC　　□(3)　∠BAC





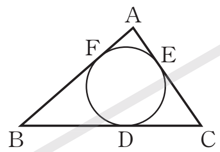


ターゲット4　［接線の長さと内接円］　➡4

AB=5，AC=4 の△ABCに内接する円が 3 辺BC，CA，ABと接する点をD，E，Fとする。AF=x とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　線分BD，CDの長さを x で表せ。

(2)　BC=6 のとき，線分AFの長さを求めよ。



解答

(1)　接線の性質より，BD= ① =AB− ② =5− ③

AE=AFより，同様に，CD= ④ =AC− ⑤ =4− ⑥

(2)　(1)より，BC=BD+DC=9− ⑦ =6

よって，AF=x= ⑧

ヒント

ターゲット4の答

① BF　② AF

③ x　④ CE

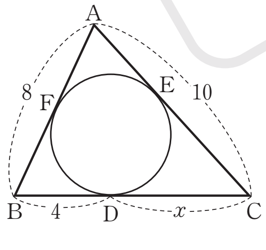
⑤ AE（AFでも可）

⑥ x　⑦ $2x$　⑧ $\frac{3}{2}$

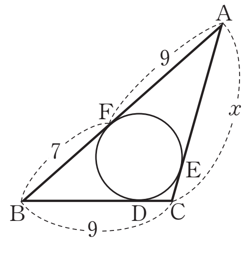
トレーニング TRAINING

7 次の図で，△ABCに内接する円が 3 辺BC，CA，ABと接する点をそれぞれD，E，Fとする。次の長さ x を求めよ。

□(1)



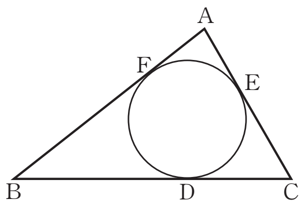
□(2)



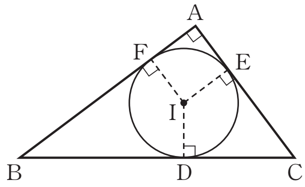
8 AB=7，AC=5 の△ABCに内接する円が 3 辺BC，CA，ABと接する点をそれぞれD，E，Fとする。AE=x とおくとき，次の問いに答えよ。

□(1)　線分CD，BDの長さを x で表せ。

□(2)　BC=8 のとき，線分AEの長さを求めよ。

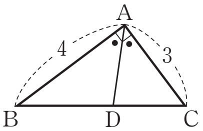


□**9** 右図のように，AB＝4，BC＝5，CA＝3 の直角三角形ABCに内接する円が 3 辺BC，CA，ABと接する点をD，E，Fとする。このとき，△ABCの内接円の半径を求めよ。ただし，内心を I とする。



ターゲット5 ［角の二等分線と比］ ➡5

AB＝4，AC＝3，∠BAC＝90° の△ABCにおいて，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとするとき，線分CDの長さを求めよ。



解答

三平方の定理により，BC＝$\sqrt{4^2+\boxed{1}}$＝$\boxed{2}$

線分ADは∠Aの二等分線であるから，BD：DC＝$\boxed{3}$：3

よって，CD＝$\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{3}+3}$BC

＝$\boxed{5}$×$\boxed{2}$＝$\boxed{6}$

ヒント

↔ 内角の二等分線の性質より

BD：DC＝AB：AC

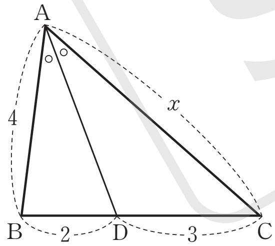
ターゲット5の答

1	3^2	2	5	3	4
4	3	5	$\dfrac{3}{7}$	6	$\dfrac{15}{7}$

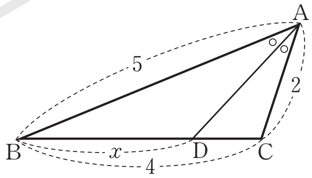
トレーニング TRAINING

10 次の図の△ABCにおいて，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとする。次の長さ x を求めよ。

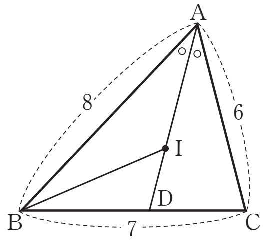
□(1)



□(2)

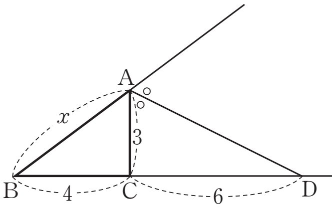


□**11** 右図の△ABCにおいて，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をD，△ABCの内心を I とするとき，線分BDの長さと，AI：IDを求めよ。

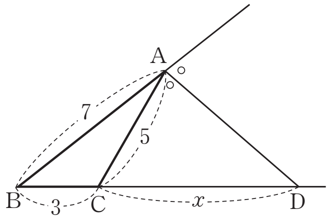


12 次の図の△ABCにおいて，頂点Aの外角の二等分線と辺BCの延長との交点をDとする。次の長さxを求めよ。

□(1)



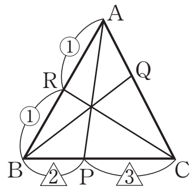
□(2)



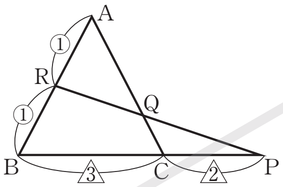
ターゲット6 ［チェバの定理・メネラウスの定理］ ➡6

次の図で，AQ：QCを求めよ。

(1)



(2)



ヒント

↔ チェバの定理，メネラウスの定理の公式に，与えられた値を代入する。

解答

(1) チェバの定理より，$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ $\frac{2}{3}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{1}{1}=1$

よって，$\frac{CQ}{QA}=\frac{3}{2}$ より，AQ：QC＝$\boxed{1}$：$\boxed{2}$

(2) メネラウスの定理より，$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ $\frac{3+2}{2}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{1}{1}=1$

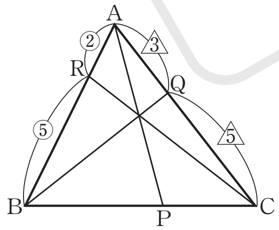
よって，$\frac{CQ}{QA}=\frac{2}{5}$ より，AQ：QC＝$\boxed{3}$：$\boxed{4}$

ターゲット6の答
1 2　2 3　3 5
4 2

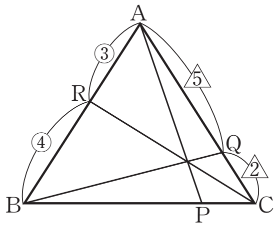
トレーニング TRAINING

13 次の図で，BP：PCを求めよ。

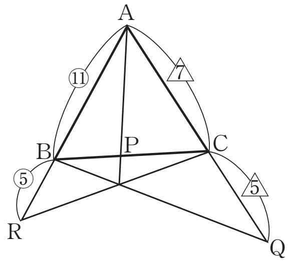
□(1)



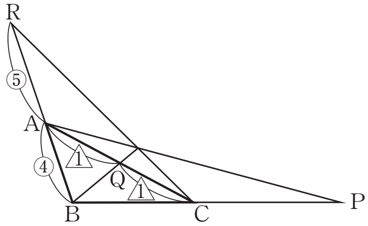
□(2)



□(3)

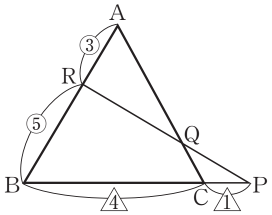


□(4)

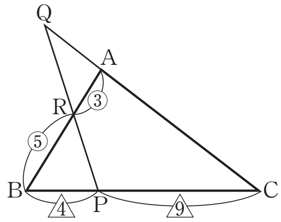


14 次の図で，CQ：QAを求めよ。

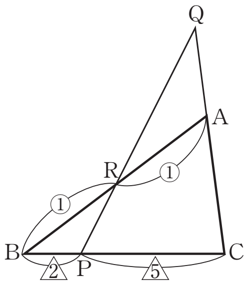
□(1)



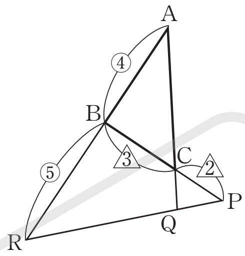
□(2)



□(3)



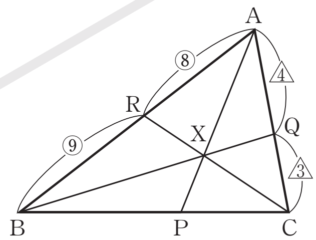
□(4)



15 右図の△ABCにおいて，辺ABを8：9に内分する点をR，辺ACを4：3に内分する点をQとする。線分BQと線分CRの交点をX，直線AXと辺BCの交点をPとするとき，次の比を求めよ。

□(1)　BP：PC

□(2)　PX：XA



ターゲット7　［三角形の辺と角の大小］　➡7

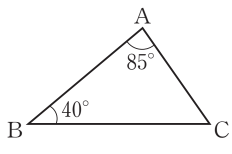
△ABCにおいて，∠A＝85°，∠B＝40° のとき，3辺BC，CA，ABの大小関係を不等号を用いて表せ。

解答

$\angle C = 180^\circ - (85^\circ + \boxed{1\quad}^\circ) = \boxed{2\quad}^\circ$

よって，$\angle\boxed{3\quad} < \angle\boxed{4\quad} < \angle A$ より

$\boxed{5\quad} < \boxed{6\quad} < BC$



ヒント

ターゲット7の答

1	40	2	55	3	B
4	C	5	CA		
6	AB				

トレーニング　TRAINING

16 次のような△ABCにおいて，３辺BC，CA，ABの大小関係を不等号を用いて表せ。

□(1)　$\angle A=55^\circ$，$\angle B=50^\circ$ のとき

□(2)　$\angle B=105^\circ$，$\angle C=30^\circ$ のとき

17 次のような△ABCにおいて，３つの内角の大小関係を不等号を用いて表せ。

□(1)　$AB=9$，$BC=5$，$CA=7$ のとき

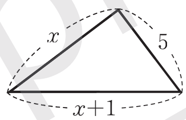
□(2)　$AB=5$，$BC=3\sqrt{3}$，$CA=4$ のとき

ターゲット８　［三角形の成立条件］　➡８

長さ x，$x+1$，5 の３つの線分を３辺とする三角形が存在する x の範囲を求めよ。

解答

辺の長さは正であるから，$x>0$，$x+1>0$ より，$x>0$ である。



三角形の成立条件より

$\boxed{①\quad} < x + \boxed{②\quad}$

よって，求める x の範囲は，$x>\boxed{③\quad}$

ヒント

⇔ 三角形の成立条件の残り２つの不等式

$x<(x+1)+5$

$x+1<x+5$

は，つねに成り立つ。

ターゲット８の答

① 5　② $x+1$　③ 2

トレーニング　TRAINING

18 ３辺の長さが次のような三角形は存在するかどうか調べよ。

□(1)　3，4，5　　□(2)　2，3，6　　□(3)　3，5，7

□(4)　3，8，10　　□(5)　4，5，10　　□(6)　5，10，20

19 ３つの線分の長さが次のようなとき，これらを３辺とする三角形が存在する x の範囲を求めよ。

□(1)　x，4，8　　□(2)　x，$x+3$，7

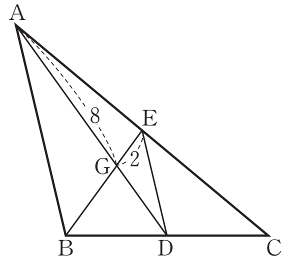
□(3)　$x+3$，$2x$，9　　□(4)　$x+2$，$2x+1$，12

まとめの問題

1 右図の△ABCで，２辺BC，CAの中点をそれぞれD，E，ADとBEの交点をGとするとき，次の問いに答えよ。

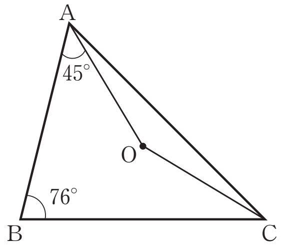
⑴　BG，ADの長さを求めよ。

⑵　面積比△ABC：△GDEを求めよ。

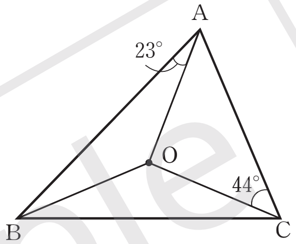


2 次の図で，点Oは△ABCの外心である。次の角の大きさを求めよ。

⑴　∠OCB

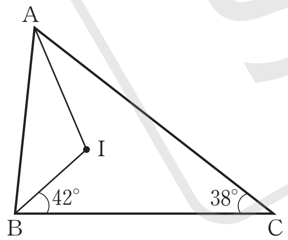


⑵　∠OBC

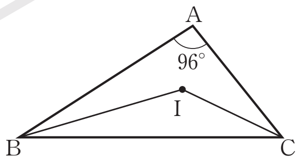


3 次の図で，点Ｉは△ABCの内心である。次の角の大きさを求めよ。

⑴　∠IAC



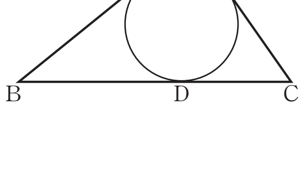
⑵　∠BIC



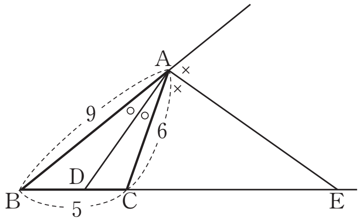
4 AB＝8，AC＝6の△ABCに内接する円が３辺BC，CA，ABと接する点をそれぞれD，E，Fとする。AE＝xとおくとき，次の問いに答えよ。

⑴　線分CD，BDの長さをxで表せ。

⑵　BC＝10のとき，AEの長さを求めよ。



5 右図の△ABCで，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をD，頂点Aの外角の二等分線と辺BCの延長との交点をEとするとき，次の問いに答えよ。

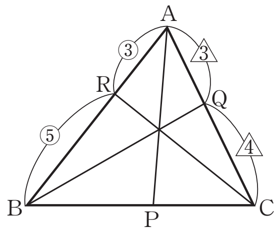


(1) DCの長さを求めよ。

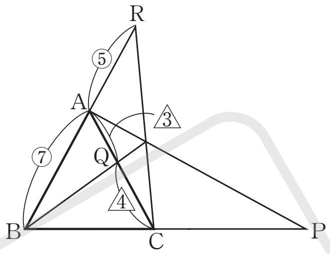
(2) ECの長さを求めよ。

6 次の図で，BP：PCを求めよ。

(1)

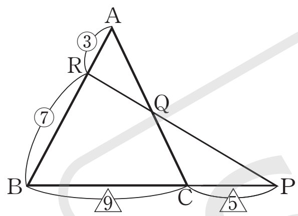


(2)

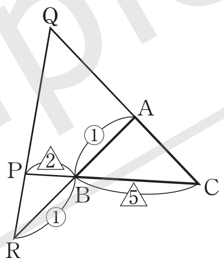


7 次の図で，CQ：QAを求めよ。

(1)



(2)



8 次の問いに答えよ。

(1) △ABCにおいて，∠A＝46°，∠B＝85° のとき，3 辺BC，CA，ABの大小関係を不等号を用いて表せ。

(2) △ABCにおいて，AB＝5，BC＝$4\sqrt{2}$，CA＝6 のとき，3 つの内角の大小関係を不等号を用いて表せ。

9 長さ $2x$，$x+9$，15の 3 つの線分を 3 辺とする三角形が存在する x の範囲を求めよ。