第24講　積分法(3)　面積・体積・曲線の長さ

入　試　標　準　演　習

1　直線 $\ell : y=m(x-2)+5$ と放物線 $C : y=x^2$ との交点の x 座標を α，β とし，ℓ と C で囲まれた部分の面積を S_1，点 $(2,\ 5)$ を通り ℓ に直交する直線と C で囲まれた部分の面積を S_2 とする。ただし，$m \neq 0$ で $\alpha<\beta$ とする。

(1)　$\beta-\alpha$ を m で表せ。

(2)　S_1，S_2 を m で表せ。

(3)　$S_1=S_2$ となるように，m の値を定めよ。

2　xy 平面上で点Pが直線 $x+y+1=0$ 上を動くとき，Pから放物線 $y=x^2$ に引いた2接線とこの放物線とで囲まれる面積 S をPの x 座標を用いて表せ。また，S が最小になるようなPの x 座標を求めよ。

3　次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y=x+\sin^2 x$ と直線 $y=\pi$ および y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

(2)　区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において2点 $\mathrm{P}(x,\ x+\sin^2 x)$，$\mathrm{Q}(x,\ \pi)$ を考え，一辺はPQ，他の一辺は長さが $\sin x$ である長方形(特別な場合は線分あるいは点)を x 軸に垂直な平面上につくる。この長方形の面積を $S(x)$ とするとき，関数 $S(x)$ は x のどんな式で表されるか。

(3)　点P，Qの x 座標が0から π まで動くとき，(2)の長方形がえがく立体の体積を求めよ。

4　2つの放物線 $y=x^2$ と $y=a^2-x^2$ $(a>0)$ とで囲まれた部分について，次の問いに答えよ。

(1)　x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ。

(2)　y 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V_2 を求めよ。

(3)　$V_1=V_2$ となるような a の値を求めよ。

5　関数 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\log x$ $(1 \leqq x \leqq e)$ と，その逆関数 $f^{-1}(x)$ $(f(1) \leqq x \leqq f(e))$ について，次の問いに答えよ。ただし，$\log x$ は e を底とする自然対数である。

(1)　定積分 $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$ を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ $(1 \leqq x \leqq e)$ の長さを求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_{f(1)}^{f(e)} f^{-1}(x)\,dx$ を求めよ。

入　試　発　展　演　習

STEP 1

1　$a>1$ に対して，$S(a)$を3つの曲線 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=a\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で囲まれた部分の面積とする。

(1)　$S(a)$を a の式で表せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to1}\frac{S(a)}{a-1}$ を求めよ。

2　$0\leqq x\leqq\pi$ において，2曲線 $y=\sin\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|$，$y=\cos 2x$ で囲まれた図形を x 軸の周りに1回転させてできる回転体の体積を求めよ。

3　関数 $f(x)=xe^x+\dfrac{e}{2}$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　次の不定積分を求めよ。

$$\int x^2f'(x)\,dx$$

(2)　曲線 $y=f(x)$ と y 軸および直線 $y=f(1)$ とで囲まれた図形を y 軸に関して1回転してできる立体の体積を求めよ。

4　$f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{x-t}{\cos^2 t}\,dt$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく。

(1)　$f'(x)$を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ の $x=0$ から $x=\dfrac{\pi}{6}$ までの長さを求めよ。

5　関数 $f(x)$，$g(x)$を $f(x)=e^{-x}\sin x$，$g(x)=e^{-x}\cos x$ とおく。$f(x)$，$g(x)$の不定積分を $I=\displaystyle\int f(x)\,dx$，$J=\displaystyle\int g(x)\,dx$ とおく。k を自然数とし，$(k-1)\pi\leqq x\leqq k\pi$ において，2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および，2直線 $x=(k-1)\pi$，$x=k\pi$ で囲まれる2つの部分の面積の和を S_k とおく。

(1)　$I=J+F(x)+C_1$，$J=-I+G(x)+C_2$ を満たす関数 $F(x)$，$G(x)$を求めよ。ただし，C_1，C_2は積分定数である。

(2)　I，Jを求めよ。

(3)　S_kを求めよ。

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}S_k$ を求めよ。

STEP・2

1 xyz 空間内に2点 $\mathrm{P}(u,\ u,\ 0)$，$\mathrm{Q}(u,\ 0,\ \sqrt{1-u^2})$ を考える。u が0から1まで動くとき，線分PQが通過してできる曲面を S とする。

(1) 点 $(u,\ 0,\ 0)$ $(0 \leqq u \leqq 1)$ と線分PQの距離を求めよ。

(2) 曲面 S を x 軸の周りに1回転させて得られる立体の体積を求めよ。

2 媒介変数表示 $x=\sin t$，$y=(1+\cos t)\sin t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ で表される曲線を C とする。

(1) $\dfrac{dy}{dx}$ および $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。

(2) C の凹凸を調べ，C の概形をかけ。

(3) C で囲まれる領域の面積 S を求めよ。

3 原点Oを中心とする半径3の円 C の外側に接する半径1の円 C' がある。C' の中心をO′とし，A，Bを C' の円周上の定点とする。最初は，O，A，O′，Bがこの順で，x 軸上に一直線上にある。C' が C に接しながら，滑ることなく C の周りを反時計回りに1回りしてもとの位置に戻るとする。

(1) 円 C' の中心O′が θ だけ回転したとき，点Bの座標 $(x,\ y)$ をそれぞれ θ で表せ。

(2) C の周りを C' が1回りしてもとの位置に戻るとき，Bが描く曲線の長さを求めよ。

4 座標平面において線分 $L：y=x$ $(0 \leqq x \leqq 1)$，曲線 $C：y=x^2-x+1$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ および y 軸で囲まれた図形を D とする。

(1) C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2-t+1)$ から L に下ろした垂線と L の交点をQとする。線分OQの長さ u を t で表せ。ただしOは原点とする。

(2) (1)のP，Qについて線分PQの長さを t を用いて表せ。

(3) 図形 D を直線 $y=x$ の周りに1回転してできる立体の体積を求めよ。