高校新演習　大学受験　**理系数学**

目 次

第1講 ››› 数と式・方程式と不等式

入試基礎演習

1 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2-2y^2-xy-2x+7y-3$ 〈札幌大〉

(2) $(x-3)(x-1)(x+3)(x+5)+35$ 〈松山大〉

(3) x^4+3x^2+4 〈名古屋経済大〉

2 $\dfrac{x+y}{3}=\dfrac{y+z}{6}=\dfrac{z+x}{7}\neq 0$ のとき，$\dfrac{2x^3+3y^3+z^3}{(x-y)(y-z)(z-x)}$ の値を求めよ。 〈神奈川大〉

3 方程式 $x^2+x+1=0$ の解の１つを ω とする。 〈岐阜経済大〉

(1) $\omega^3=1$ であることを示せ。

(2) $\omega^{10}+\omega^5+3$ の値を求めよ。

(3) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots\cdots+\omega^{30}$ の値を求めよ。

4 a，b は定数で，x についての整式 x^3+ax+b は $(x+1)^2$ で割り切れるとする。このとき，$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$ である。 〈早稲田大〉

5 次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{-2x^2+6}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{a}{x+1}-\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$ が x についての恒等式となるように定数 a，b，c の値を定めよ。 〈広島経済大〉

(2) $a-b=1$ を満たす a，b に対して，常に等式 $(a-2)x+b^2y+az=b-3$ が成り立つとき，x，y，z の値を求めよ。 〈芝浦工業大〉

6 次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ のとき，$1<\sqrt{1+x}<1+x$ が成り立つことを証明せよ。 〈群馬大〉

(2) $a:b=2:3$，$b:c=2:3$ であるとき，$a^2+bc+\dfrac{9}{b^2}+\dfrac{9}{ac}$ の最小値を求めよ。 〈北海道薬科大〉

入試問題演習

STEP 1

1 $x^2-xy-2y^2+ax-y+1$ が1次式の積に因数分解されるように，定数 a の値を求めよ。 〈東京電機大〉

2 次の問いに答えよ。

(1) 整式 $x^{15}-8$ を x^2-1 で割ったときの余りを求めよ。 〈摂南大〉

(2) 整式 $x^{15}+1$ を x^2+x+1 で割ったときの余りを求めよ。 〈立教大〉

3 多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか。 〈京都大〉

4 整式 $f(x)$ について，恒等式 $f(x^2)=x^3f(x+1)-2x^4+2x^2$ が成り立つとする。 〈東京都立大〉

(1) $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の次数を求めよ。

(3) $f(x)$ を決定せよ。

5 次の問いに答えよ。

(1) 実数 a，b は，$0<a<b$ を満たすとする。次の3つの数の大小関係を求めよ。 〈九州大〉

$$\frac{a+2b}{3},\quad \sqrt{ab},\quad \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}$$

(2) $x<1$ のとき，x の関数 $y=x+\dfrac{1}{x-1}$ の最大値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。 〈関西大〉

(3) x，y，z が条件 $x+2y+3z=1$ を満たすならば，$x^2+4y^2+9z^2$ は $x=\boxed{\text{ア}}$，$y=\boxed{\text{イ}}$，$z=\boxed{\text{ウ}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{エ}}$ をとる。 〈慶應義塾大〉

STEP 2

1 $a=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$，$b=\dfrac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$，$c=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$，$d=\dfrac{1}{1-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ とおく。 〈東京理科大〉

(1) $abcd=\boxed{}$である。

(2) abc，abd，acd，bcd の最小値は$\boxed{}$である。

(3) $ab+cd$，$ac+bd$，$ad+bc$ の最小値は$\boxed{}$である。

(4) $a+b$，$a+c$，$a+d$，$b+c$，$b+d$，$c+d$ の最小値は$\boxed{}$である。

(5) $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=\dfrac{\boxed{}x^4-\boxed{}x^3+\boxed{}x^2+\boxed{}x-1}{\boxed{}}$ である。

2 $a+b+c\neq 0$，$abc\neq 0$ を満たす実数 a，b，c が

(A) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$

を満たしている。このとき，任意の奇数 n に対し

(B) $\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}+\dfrac{1}{c^n}=\dfrac{1}{(a+b+c)^n}$

が成立することを示せ。 〈早稲田大〉

3 整数を係数とする x の整式 A を，x^3+x^2+x+1 で割ると余りは $-3x^2-x+2$ であり，x^2+2x+3 で割ると余りは $5x+3$ であるという。このような A の中で，次数が最小のものを求めよ。 〈上智大〉

4 a は 0 とは異なる実数とし，$f(x)=ax(1-x)$ とおく。 〈一橋大〉

(1) $f(f(x))-x$ は，$f(x)-x$ で割り切れることを示せ。

(2) $f(p)=q$，$f(q)=p$ を満たす異なる実数 p，q が存在するような a の範囲を求めよ。

5 $x>0$，$y>0$，$\dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}=1$ のとき，$\sqrt{x+y}$ の最小値を求めよ。 〈大阪経済大〉