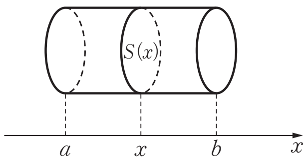
第18講　積分法(6)　定積分と体積

基本事項

1 定積分と体積



ある立体を x 軸に垂直な平面で切ったときの断面積が $S(x)$ であるとき，この立体の $a \leqq x \leqq b$ の部分の体積は

$$\int_a^b S(x)\,dx$$

により求められる。

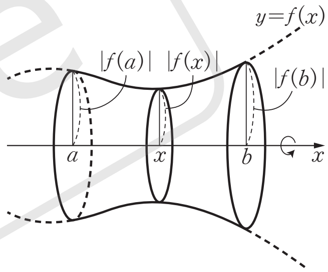
ある立体を y 軸に垂直な平面で切ったときの断面積が $S(y)$ であるとき，この立体の $a \leqq y \leqq b$ の部分の体積は

$$\int_a^b S(y)\,dy$$

により求められる。

2 回転体の体積

(1)　x 軸のまわりの回転体の体積



曲線 $y=f(x)$ を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体について，x 軸に垂直な平面による断面は半径が $|f(x)|$ の円であるから，断面積は $\pi\{f(x)\}^2$ であり，$a \leqq x \leqq b$ の部分の体積は

$$\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2dx$$

により求められる。

2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ $(0 \leqq g(x) \leqq f(x))$ にはさまれた図形の $a \leqq x \leqq b$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積は

$$\pi\int_a^b [\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2]dx$$

により求められる。

$f(x)$，$g(x)$ が定数のときは円柱の体積の公式，1 次関数のときは円錐の体積の公式を用いることで，その部分の定積分の計算をすることなく体積を求めることができる。

(2)　y 軸のまわりの回転体の体積

曲線 $x=f(y)$ の $a \leqq y \leqq b$ の部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積は

$$\pi\int_a^b x^2dy=\pi\int_a^b \{f(y)\}^2dy$$

により求められる。

2 つの曲線 $x=f(y)$，$x=g(y)$ $(0 \leqq g(y) \leqq f(y))$ にはさまれた図形の $a \leqq y \leqq b$ の部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積は

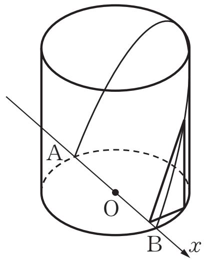
$$\pi\int_a^b [\{f(y)\}^2-\{g(y)\}^2]dy$$

により求められる。

例題 1

底面の円の半径が1，高さが$\sqrt{3}$の円柱を，底面の円の直径を含み底面と60°の角をなす平面で2つの部分に分けたとき，小さい方の立体の体積を求めよ。

解答　右の図のように，底面の直径ABを含む直線をx軸とし，底面の円の中心を原点Oとすると，x軸に垂直な平面による求める立体の断面は，右下の図のような直角三角形PQRとなる。

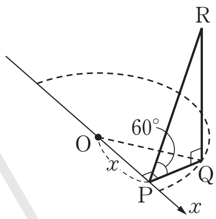


点Pの座標をxとすると

$PQ=\sqrt{1-x^2}$，$QR=\sqrt{3}\,PQ=\sqrt{3(1-x^2)}$

したがって

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{3(1-x^2)}=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)$$



よって，求める立体の体積は

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)\,dx$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1(1-x^2)\,dx$$

←── $f(x)$が偶関数のとき $\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=2\int_0^a(x)\,dx$

$$=\sqrt{3}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

正解へのアクセス

x軸に垂直な平面による断面の面積をxで表し，これを$-1\leqq x\leqq 1$の範囲で積分する。

類題 1

底面の円の半径が1，高さが1の円柱を，底面の円の直径を含み底面と45°の角をなす平面で2つの部分に分けたとき，小さい方の立体の体積を求めよ。

例題 2

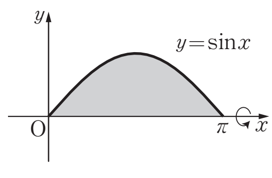
次の問いに答えよ。

(1)　曲線$y=\sin x$の$0\leqq x\leqq\pi$の部分とx軸で囲まれた図形を，x軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

(2)　円$x^2+(y-2\sqrt{3})^2=4$で囲まれた図形を，x軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

(3)　放物線$y=(x-1)^2$とx軸，y軸で囲まれた図形を，y軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

解答　(1)　右の図より，求める立体の体積は



$$\pi\int_0^{\pi}y^2dx=\pi\int_0^{\pi}\sin^2x\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{2}\{(\pi-0)-(0-0)\}=\frac{\pi^2}{2}$$

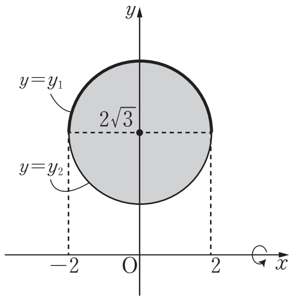
(2)　$x^2+(y-2\sqrt{3})^2=4$ より

$$(y-2\sqrt{3})^2=4-x^2$$
$$y-2\sqrt{3}=\pm\sqrt{4-x^2}$$
$$y=2\sqrt{3}\pm\sqrt{4-x^2}$$

であるから

$$y_1=2\sqrt{3}+\sqrt{4-x^2}$$
$$y_2=2\sqrt{3}-\sqrt{4-x^2}$$

とすると，$y_1 \geqq y_2$ である。



よって，求める立体の体積 V は

$$V=\pi\int_{-2}^{2}(y_1{}^2-y_2{}^2)\,dx$$
$$=\pi\int_{-2}^{2}(y_1+y_2)(y_1-y_2)\,dx$$
$$=\pi\int_{-2}^{2}4\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{4-x^2}\,dx$$
$$=8\sqrt{3}\,\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

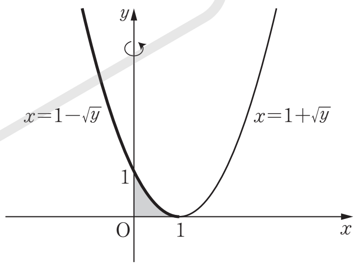
ここで，定積分 $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ の値は，半径 2 の円の $\dfrac{1}{2}$ の面積を表すから

$$V=8\sqrt{3}\,\pi\times\pi\cdot 2^2\cdot\frac{1}{2}=16\sqrt{3}\,\pi^2$$

(3)　$y=(x-1)^2$ より

$$x-1=\pm\sqrt{y}$$
$$x=1\pm\sqrt{y}$$

右の図より，求める立体の体積は



$$\pi\int_0^1 x^2\,dy=\pi\int_0^1(1-\sqrt{y})^2\,dy$$
$$=\pi\int_0^1(1-2\sqrt{y}+y)\,dy$$
$$=\pi\left[y-\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}y^2\right]_0^1$$
$$=\pi\left(1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$$

正解へのアクセス

回転体の体積を求めるには，回転軸に垂直な平面による立体の断面の面積を考え，回転軸に沿って積分すればよい。

類題 2

次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y=\log x$ と x 軸および直線 $x=3$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

(2)　円 $(x-4)^2+y^2=1$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

(3)　放物線 $y=(x+2\sqrt{2})^2$ と x 軸，y 軸で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

演　習　問　題

1　次の立体の体積を定積分を用いて求めよ。▶例題 1

(1)　底面積 S，高さ h の角錐

(2)　底面の半径 r，高さ h の円錐

(3)　半径 r の球

2　曲線 $C: y=\sin x\ (0\leqq x\leqq \pi)$ について，C 上の点Pを通り y 軸に平行な直線と x 軸との交点をQとする。線分PQを１辺とする正三角形PQRを，xy 平面に対して垂直につくる。点Pの x 座標が０から π まで変わるとき，この正三角形が通過してできる立体の体積を求めよ。▶例題 1

3　次の曲線や直線で囲まれた図形を，x 軸のまわりに１回転してできる立体の体積を求めよ。▶例題 2

(1)　曲線 $y=\sqrt{1-x}$，x 軸，y 軸

(2)　曲線 $y=e^x$，２直線 $x=-1$，$x=1$，x 軸

(3)　放物線 $y=x^2$，直線 $y=x$

4　楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ で囲まれた図形を，次の直線のまわりに１回転してできる立体の体積を求めよ。▶例題 2

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　直線 $y=3$

5　不等式 $(x-1)^2+y^2\leqq 4$ の表す領域を，y 軸のまわりに１回転してできる立体の体積を求めよ。▶例題 2

6　$x=\theta-\sin\theta$，$y=1-\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ によって表される曲線と x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに１回転してできる立体の体積を求めよ。

応　用　問　題

STEP 1

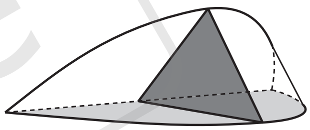
1 関数 $f(x)=\begin{cases} x\log x & (x>0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ について，次の問いに答えよ。ただし，$\lim_{x\to+0} x\log x=0$ である。

(1) この関数の増減を調べて，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。

2 中心間の距離が2であるような，半径1の球と半径2の球がある。これらの球面の交わりの円の半径および，これらの球の重なった部分の体積を求めよ。

3 xy 平面内の放物線 $y=x^2-2x-1$ と直線 $y=-x+1$ で囲まれた部分を底面とし，x 軸に垂直な平面で切った切り口がつねに正三角形であるような右の図の概形をもつ立体の体積を求めよ。



4 曲線 $y=a\log x$ $(a>0)$ と x 軸および直線 $x=e$ で囲まれた図形を D とする。D を x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を V_1，D を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を V_2 とする。

(1) V_1 を求めよ。

(2) V_2 を求めよ。

(3) $V_1=V_2$ となるときの a の値を求めよ。

STEP 2

1 放物線 $y=2-x^2$ と直線 $y=-x$ と直線 $y=x$ によって囲まれる領域の1つ(図の色のついた部分)を S とする。

(1) S を y 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

(2) S を直線 $y=-x$ のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。