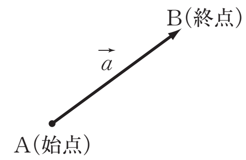
第1講　ベクトル(1)　平面上のベクトルと演算

基　本　事　項

① ベクトルの意味

線分ABについて，AからBに向かうという向きを考えたものを有向線分ABといい，Aを始点，Bを終点という。このような有向線分について，位置を問題にせず大きさと向きだけを考えたものをベクトルという。



右図のようなベクトルを$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{a}$のように表す。

線分ABの長さを$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$の大きさといい，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$，$|\vec{a}|$のように表す。

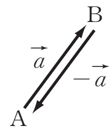
2つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$の向きが同じで大きさが等しいとき，$\vec{a}$と$\vec{b}$は等しいといい，$\vec{a}=\vec{b}$と表す。

② 単位ベクトル，零ベクトル，逆ベクトル

大きさが1のベクトルを単位ベクトルという。

始点と終点が一致したベクトルを零ベクトルといい，$\vec{0}$で表す。$\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}$である。$\vec{0}$の大きさは0であり，向きは考えない。

ベクトル$\vec{a}$と大きさが等しく向きが反対のベクトルを$\vec{a}$の逆ベクトルといい，$-\vec{a}$で表す。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$とするとき，$-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$である。



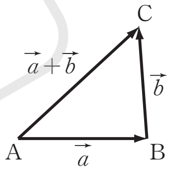
③ ベクトルの演算

(1)　ベクトルの加法

2つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$に対して，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$とする。

ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を$\vec{a}$と$\vec{b}$の和といい，$\vec{a}+\vec{b}$と表す。すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

特に，$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

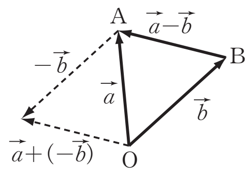


(2)　ベクトルの減法

$\vec{a}$に$\vec{b}$の逆ベクトル$-\vec{b}$を加えたベクトルを$\vec{a}$から$\vec{b}$を引いた差といい，$\vec{a}-\vec{b}$と表す。すなわち，$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

特に，$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$のとき，$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$となる。すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$



(3)　ベクトルの実数倍

ベクトル$\vec{a}$と実数kに対して$k\vec{a}$は，

$\vec{a}\neq\vec{0}$のとき

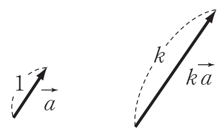
(i)　$k>0$のとき，$\vec{a}$と同じ向きで，大きさが$k|\vec{a}|$

(ii)　$k=0$のとき，$\vec{0}$

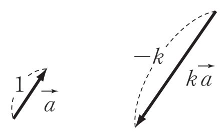
(iii)　$k<0$のとき，$\vec{a}$と反対の向きで，大きさが$|k||\vec{a}|=-k|\vec{a}|$

$\vec{a}=\vec{0}$のとき　$k\vec{0}=\vec{0}$と定める。

$k>0$のとき



$k<0$のとき



(4)　ベクトルの演算

ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，実数k，ℓについて，次の演算法則が成り立つ。

(i)　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　　(ii)　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(iii)　$k(\ell\vec{a})=(k\ell)\vec{a}$　　(iv)　$(k+\ell)\vec{a}=k\vec{a}+\ell\vec{a}$

(v)　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

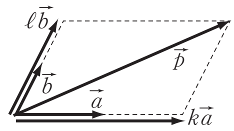
④ ベクトルの平行

$\vec{0}$でない2つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が同じ向き，または反対の向きであるとき，$\vec{a}$と$\vec{b}$は平行であるといい，$\vec{a}/\!/\vec{b}$と表す。

$\vec{a}/\!/\vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$となる実数$k$がある

このとき，$k>0$ならば$\vec{a}$と$\vec{b}$は同じ向き，$k<0$ならば$\vec{a}$と$\vec{b}$は反対の向きである。

5 ベクトルの1次独立と分解



$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が平行でないことを，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立であるという。このとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は実数 k，ℓ を用いて $\vec{p}=k\vec{a}+\ell\vec{b}$ とただ1通りに表される。$k\vec{a}+\ell\vec{b}$ を1次結合の式という。

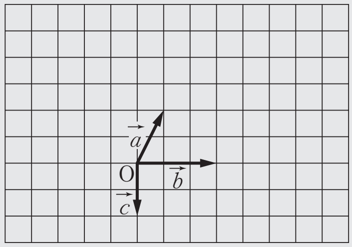
例題 1

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が右図のように与えられているとき，次のベクトルを点Oを始点として図示せよ。

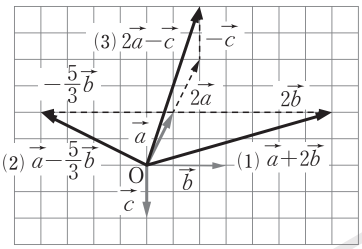
(1) $\vec{a}+2\vec{b}$

(2) $\vec{a}-\dfrac{5}{3}\vec{b}$

(3) $2\vec{a}-\vec{c}$



解答



正解へのアクセス

$\vec{p}+\vec{q}$ の図示は，$\vec{p}$ の終点を始点として $\vec{q}$ を作り，その終点と点Oを結ぶ。$\vec{p}-\vec{q}$ は $\vec{p}+(-\vec{q})$ と考える。

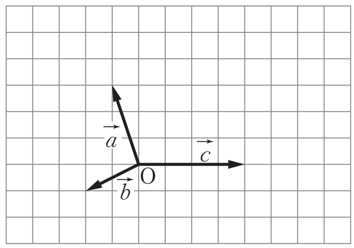
類題 1

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が右図のように与えられているとき，次のベクトルを点Oを始点として図示せよ。

(1) $\vec{a}-\vec{b}$

(2) $-\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{c}$

(3) $2\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{7}{4}\vec{c}$



例題 2

$\vec{a}=\vec{x}+2\vec{y}$，$\vec{b}=3\vec{x}-\vec{y}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) $2\vec{a}-3\vec{b}$ を $\vec{x}$，$\vec{y}$ を用いて表せ。　　(2) $\vec{x}$，$\vec{y}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

解答

(1) $2\vec{a}-3\vec{b}=2(\vec{x}+2\vec{y})-3(3\vec{x}-\vec{y})=2\vec{x}+4\vec{y}-9\vec{x}+3\vec{y}=-7\vec{x}+7\vec{y}$

(2) $\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}$ ……①　　$3\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}$ ……②

①＋②×2 より，$7\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}$　　$\vec{x}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{7}$

これを①に代入して，$\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{7}+2\vec{y}=\vec{a}$　　$\vec{y}=\dfrac{3\vec{a}-\vec{b}}{7}$

正解へのアクセス

(1) ベクトルの和・差・実数倍の計算は多項式と同じように行うことができる。

(2) $\vec{x}$，$\vec{y}$ についての連立方程式とみて解く。

類題 2

$\vec{a}=2\vec{x}-3\vec{y}$，$\vec{b}=4\vec{x}+\vec{y}$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$3\vec{a}-2\vec{b}$ を $\vec{x}$，$\vec{y}$ を用いて表せ。　　(2)　$\vec{x}$，$\vec{y}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

例題 3

$\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}$，$\vec{y}=\vec{a}+2\vec{b}$ のとき，$\vec{x}+\vec{y}$ と $-3\vec{x}-7\vec{b}$ が平行となることを示せ。ただし，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとする。

解答

$$\vec{x}+\vec{y}=(2\vec{a}-3\vec{b})+(\vec{a}+2\vec{b})$$
$$=3\vec{a}-\vec{b}$$
$$-3\vec{x}-7\vec{b}=-3(2\vec{a}-3\vec{b})-7\vec{b}$$
$$=-6\vec{a}+2\vec{b}=-2(3\vec{a}-\vec{b})$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ と $\vec{b}$ は平行でないから，$\vec{x}+\vec{y}\neq\vec{0}$，$-3\vec{x}-7\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$-3\vec{x}-7\vec{b}=-2(\vec{x}+\vec{y})$ が成り立つ。よって，$\vec{x}+\vec{y}$ と $-3\vec{x}-7\vec{b}$ は平行である。

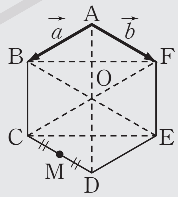
正解へのアクセス

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{p}$，$\vec{q}$ が平行であることを示すには，$\vec{q}=k\vec{p}$ を満たす実数 k があることを示せばよい。$\vec{x}+\vec{y}$ と $-3\vec{x}-7\vec{b}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すことで示せる。

類題 3

$\vec{x}=-3\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{y}=2\vec{a}-5\vec{b}$ のとき，$\vec{x}+2\vec{a}$ と $3\vec{x}-2\vec{y}$ が平行となることを示せ。ただし，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$は平行でないとする。

例題 4



右図の正六角形ABCDEFにおいて，対角線AD，BE，CFの交点をO，辺CDの中点をMとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{BC}$　　(2)　$\overrightarrow{EC}$

(3)　$\overrightarrow{AM}$

解答

(1)　四角形ABCO，四角形ABOFはひし形である。
よって，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\vec{b}$

(2)　四角形BCEFは長方形である。
よって，$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}=\vec{a}-\vec{b}$

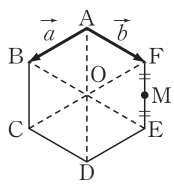
(3)　点Mは辺CDの中点であるから，$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\vec{b}$

よって，$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b})+\frac{1}{2}\vec{b}=2\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$

正解へのアクセス

始点から終点までどのようにたどればよいかを考えてベクトルを分解し，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表す。

類題 4



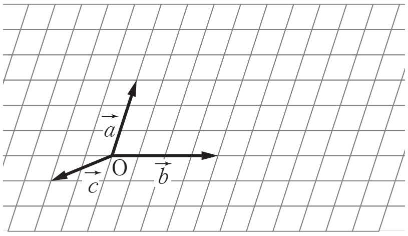
右図の正六角形ABCDEFにおいて，対角線AD，BE，CFの交点をO，辺EFの中点をMとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{FD}$　　(2)　$\overrightarrow{DA}$

(3)　$\overrightarrow{AM}$

◆ 演　習　問　題 ◆

1　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が右図のように与えられているとき，次のベクトルを点Oを始点として図示せよ。 ▶例題 1



(1)　$\vec{a}+2\vec{b}$

(2)　$-\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{b}$

(3)　$\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$

2　$\vec{x}=\vec{a}+2\vec{c}$，$\vec{y}=2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}$ のとき，次の問いに答えよ。 ▶例題 2

(1)　$2(\vec{x}+\vec{y})-3(\vec{x}-\vec{y})$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

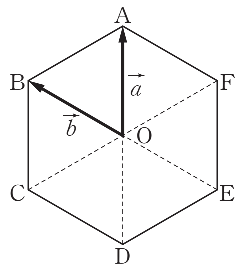
(2)　$\begin{cases} \vec{p}+\vec{q}=4\vec{x}-\vec{y} \\ 2\vec{p}-3\vec{q}=-2\vec{x}+8\vec{y} \end{cases}$ を満たす $\vec{p}$，$\vec{q}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

3　$\vec{a}=\vec{c}-3\vec{d}$，$\vec{b}=-\dfrac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}$ のとき，次の問いに答えよ。ただし，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{c}-4\vec{d}\neq\vec{0}$ とする。 ▶例題 3

(1)　$\vec{c}$，$\vec{d}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　$(\vec{c}-4\vec{d})\,/\!/\,\vec{a}$ のとき，$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$ が成り立つことを示せ。

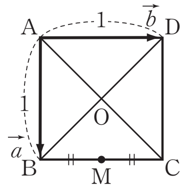
4　右図の正六角形ABCDEFにおいて，対角線AD，BE，CFの交点をOとし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。 ▶例題 4



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$

5　右図のような1辺の長さが1の正方形ABCDにおいて，対角線AC，BDの交点をO，辺BCの中点をMとし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，その大きさを求めよ。 ▶例題 4

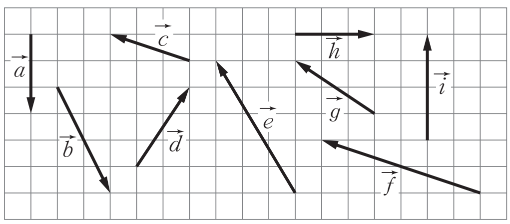


(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{MD}}$

6　右図において，次の条件を満たすベクトルの組をすべて答えよ。



(1)　互いに平行なベクトルの組

(2)　大きさが等しいベクトルの組

応　用　問　題

STEP 1

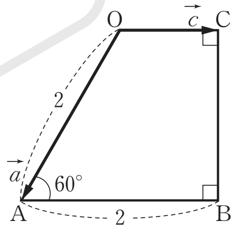
1 $\vec{a} \neq \vec{0}$，x が実数のとき，$x^2\vec{a} = x\vec{a} + 2\vec{a}$ となる x の値を求めよ。

2 $\begin{cases} \vec{x}+\vec{y}+2\vec{z}=3\vec{a}+\vec{b} \\ \vec{x}+2\vec{y}+\vec{z}=\vec{a}-2\vec{b} \\ 2\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=4\vec{a}+5\vec{b} \end{cases}$ が成り立つとき，$\vec{x}$，$\vec{y}$，$\vec{z}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

3 互いに異なる５点O，A，B，C，Dがある。四角形ABCDが平行四辺形となるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

4 ３点O，A，Bは同一直線上にない点である。点Mは線分OAの中点，点Nは線分AB上の点で，AN：NB＝3：1である。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{NM}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

5 右図の台形OABCで，∠OAB＝60°，∠ABC＝∠OCB＝90°，OA＝AB＝2である。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。



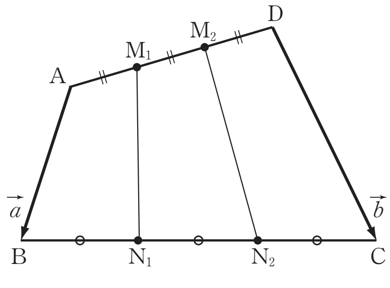
STEP 2

1 四角形ABCDにおいて，辺ADを３等分する点を点Aに近い方から$\mathrm{M_1}$，$\mathrm{M_2}$とし，辺BCを３等分する点を点Bに近い方から$\mathrm{N_1}$，$\mathrm{N_2}$とする。
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{b}$ として，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{M_1N_1}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{M_1N_1}}+\overrightarrow{\mathrm{M_2N_2}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{M_1N_2}}+\overrightarrow{\mathrm{M_2N_1}}$



2 右図の正八角形ABCDEFGHにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{GE}}$