高校新演習　数学B

目次

第1講 >>> 数　列 (1)

基本事項

1 数列と一般項

(1) ある一定の規則にしたがって数を一列に並べたものを数列といい，数列の各数を数列の項という。

項の個数が有限である数列を有限数列，項が無限に続く数列を無限数列という。数列の項は，はじめから順に，第１項，第２項，第３項，…といい，n番目の項を第n項という。

とくに，第１項を初項ともいい，有限数列においては項の個数を項数，最後の項を末項という。

例 (i) 正の奇数を小さい順に並べると

1，3，5，7，9，11，…

であり，この数列は無限数列である。

(ii) 42の正の約数を小さい順に並べると

1，2，3，6，7，14，21，42

であり，この数列は項数８の有限数列である。

(2) 数列の初項をa_1，第２項をa_2，第３項をa_3，…，第n項をa_n，…として

a_1，a_2，a_3，…，a_n，…

のように表すとき，この数列を数列$\{a_n\}$と呼び，第n項a_nがnの式で表されるとき，これを数列の一般項という。

例 数列$\{a_n\}$の一般項が，$a_n=3n-1$で表されるとき

$a_1=3\cdot1-1=2$，$a_2=3\cdot2-1=5$，$a_3=3\cdot3-1=8$，…

であり，この数列は　2，5，8，…，$3n-1$，…　と書ける。

2 等差数列

数列$\{a_n\}$において，各項に一定の数dを加えると次の項が得られるとき，この数列を等差数列といい，dを公差という。

すなわち，すべての自然数nについて，$a_{n+1}=a_n+d$が成り立つ数列$\{a_n\}$が等差数列で，初項をaとすると

$$a \xrightarrow{+d} a+d \xrightarrow{+d} a+2d \xrightarrow{+d} a+3d,\ \cdots$$

であり，初項a，公差dの等差数列$\{a_n\}$について次のことがいえる。

(1) 一般項は，$a_n=a+(n-1)d$

(2) 初項から第n項までの和をS_nとし，第n項をlとすると，$l=a+(n-1)d$であり

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

例 １からnまでの自然数の和は，初項１，末項n，項数nの等差数列の和であるから

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(1+n)}{2}$$

3 ３つの数 a，b，c がこの順に等差数列であるとき

$b-a=c-b$より，$2b=a+c$

が成り立つ。

例題 1

一般項a_nが次の式で表される数列$\{a_n\}$の初項から第５項までを求めよ。

(1)　$a_n=\dfrac{3^n-1}{2}$　　(2)　$a_n=1+(-2)^n$

解答　(1)　$a_1=\dfrac{3^1-1}{2}=1$，$a_2=\dfrac{3^2-1}{2}=4$，$a_3=\dfrac{3^3-1}{2}=13$，$a_4=\dfrac{3^4-1}{2}=40$，$a_5=\dfrac{3^5-1}{2}=121$

(2)　$a_1=1+(-2)^1=-1$，$a_2=1+(-2)^2=5$，$a_3=1+(-2)^3=-7$，$a_4=1+(-2)^4=17$，$a_5=1+(-2)^5=-31$

正解へのアクセス

nに１，２，３，…と数字をあてはめて計算すればよい。

類題 1

一般項a_nが次の式で表される数列$\{a_n\}$の初項から第５項までを求めよ。

(1)　$a_n=\dfrac{2^n+1}{3}$　　(2)　$a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n-1$

例題 2

次の問いに答えよ。

(1)　初項５，公差２の等差数列の一般項a_nと第10項を求めよ。

(2)　第４項が８，公差が３である等差数列の一般項a_nと第７項を求めよ。

(3)　初項が２，第６項が-13である等差数列の一般項a_nを求めよ。

(4)　第３項が-14，第10項が14である等差数列の一般項a_nを求めよ。

解答　求める数列の初項をa，公差をdとする。

(1)　$a_n=5+(n-1)\cdot 2=2n+3$　　$a_{10}=2\cdot 10+3=23$

(2)　$a_4=8$，$d=3$であるから，$a+(4-1)\cdot 3=8$　　$a=-1$

よって，$a_n=-1+(n-1)\cdot 3=3n-4$　　$a_7=3\cdot 7-4=17$

(3)　$a=2$，$a_6=-13$であるから，$2+(6-1)\cdot d=-13$　　$d=-3$

よって，$a_n=2+(n-1)\cdot(-3)=-3n+5$

(4)　$a_3=-14$であるから，$a+2d=-14$　……①　　$a_{10}=14$であるから，$a+9d=14$　……②

①，②より，$a=-22$，$d=4$

よって，$a_n=-22+(n-1)\cdot 4=4n-26$

正解へのアクセス

初項をa，公差をdとおくと，等差数列の一般項a_nは，$a_n=a+(n-1)d$と表されることから，与えられた条件をあてはめて考える。

類題 2

次の問いに答えよ。

(1)　初項-3，公差４の等差数列の一般項a_nと第８項を求めよ。

(2)　第５項が４，公差が-2である等差数列の一般項a_nと第９項を求めよ。

(3)　初項が-4，第４項が８である等差数列の一般項a_nを求めよ。

(4)　第４項が10，第８項が２である等差数列の一般項a_nを求めよ。

例題 3

等差数列について，次の問いに答えよ。

(1) 初項 1，末項 $\frac{26}{3}$，公差 $\frac{1}{3}$ のとき，項数と初項から末項までの和を求めよ。

(2) 初項が -9，第 2 項が -7 のとき，初項から第何項までの和が96となるか。

解答 (1) 項数を n，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，末項は $\frac{26}{3}$ であるから，$1+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{26}{3}$ 　$n=24$

よって，項数は24

また，$S_{24}=\dfrac{24\left(1+\frac{26}{3}\right)}{2}=12\cdot\frac{29}{3}=116$ より，初項から末項までの和は，116

(2) 初項は -9，公差は $-7-(-9)=2$ であるから，和が96となるときの項数を n とすると

$$\frac{n\{2\cdot(-9)+(n-1)\cdot 2\}}{2}=96$$

$n(n-10)=96$ 　$n^2-10n-96=0$ 　$(n-16)(n+6)=0$

n は正の整数であるから，$n=16$

よって，第16項までの和が96となる。

正解へのアクセス

初項 a，公差 d，末項 l，項数 n とすると，等差数列の初項から第 n 項までの和 S_n は，

$S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$ と表されることを利用する。

類題 3

等差数列について，次の問いに答えよ。

(1) 初項 2，末項 $\frac{18}{5}$，公差 $\frac{1}{5}$ のとき，項数と初項から末項までの和を求めよ。

(2) 初項が -2，第 2 項が 2 のとき，初項から第何項までの和が48となるか。

例題 4

3 つの数 x，y，x^2 はこの順に等差数列である。3 つの数の和が45であるとき，x，y の値を求めよ。

解答 x，y，x^2 がこの順に等差数列であるから，$2y=x+x^2$ ……①

和が45より，$x+y+x^2=45$ ……②

①を②に代入して，$y+2y=45$ 　$y=15$

①に代入して，　$30=x+x^2$ 　$x^2+x-30=0$ 　$(x-5)(x+6)=0$

$x=5,\ -6$

よって，$(x,\ y)=(5,\ 15)$，$(-6,\ 15)$

正解へのアクセス

3 つの数が順に等差数列となるとき，真ん中の数の 2 倍は，他の 2 数の和と等しくなることを利用する。

類題 4

3 つの数 x，x^2，$2y$ はこの順に等差数列である。3 つの数の和が12であるとき，x，y の値を求めよ。

演　習　問　題

1　一般項a_nが次の式で表される数列$\{a_n\}$において，初項から第５項までを求めよ。例題❶

(1)　$a_n=\dfrac{4^{n-1}-1}{3}$　　　　(2)　$a_n=\dfrac{(-\sqrt{n}\,)^n}{n}$

2　次の問いに答えよ。例題❷

(1)　等差数列 8，5，2，…について，一般項a_nと第10項を求めよ。

(2)　第５項が98，第16項が10である等差数列について，一般項a_nと第30項を求めよ。

(3)　初項25，公差 -4 である等差数列について，$a_n=-7$ となる n の値を求めよ。

3　次のような等差数列の初項から末項までの和を求めよ。例題❸

(1)　初項が３，第７項が27，項数10

(2)　公差が -1，第12項が６，項数12

(3)　第４項が -8，第８項が12，項数14

4　第２項が43，第９項が22である等差数列について，次の問いに答えよ。例題❸

(1)　初項と公差を求めよ。

(2)　初項から第 n 項までの和が最大となるような n の値と，そのときの和の最大値を求めよ。

5　初項２，公差３である等差数列$\{a_n\}$と，初項100，公差 -4 である等差数列$\{b_n\}$について，次の問いに答えよ。例題❸

(1)　２つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$に共通に現れる最小の項と最大の項の値をそれぞれ求めよ。

(2)　２つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$に共通な項の和を求めよ。

6　200以下の自然数のなかで，２の倍数の総和をS，３の倍数の総和をT，６の倍数の総和をUとする。このとき，次の問いに答えよ。例題❸

(1)　S，T，Uの値をそれぞれ求めよ。

(2)　200以下の自然数のなかで，２でも３でも割り切れない数の総和を求めよ。

7　数列$\{a_n\}$：a_1，a_2，a_3，…に対し，逆数の数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$：$\dfrac{1}{a_1}$，$\dfrac{1}{a_2}$，$\dfrac{1}{a_3}$，…が等差数列となるとき，数列$\{a_n\}$を調和数列という。

いま，初項が10，第７項が４の調和数列$\{a_n\}$について，a_2，a_3，a_4および一般項a_nを求めよ。

8　正の実数 a について，３つの数 a，$\dfrac{1}{a}$，４はこの順に等差数列である。このとき，a の値を求めよ。例題❹

入試問題演習

STEP 1

1 次の問いに答えよ。

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第3項までの和が6，初項から第6項までの和が75であるとき，この数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n と，$\{a_n\}$ の初項から第101項までの和を求めよ。

(2) 初項が12，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を a_n とし，初項が c，公差 $2d$ の等差数列 $\{b_n\}$ の一般項を b_n，$\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$a_8=b_8$ かつ $S_{10}=180$ を満たすとき，S_8 の値を求めよ。 〈中京大-改〉

2 初項が77，公差が -3 である等差数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。 〈高知大〉

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 項の値が負の数になる最初のものは第何項か。

(3) 初項から第何項までの和が最大となるか。また，そのときの和を求めよ。

3 2つの数5と k の間に4個の数を入れて，この順で等差数列になるようにする。この6個の数の和が120であるとき，数 k の値と公差 d を求めよ。

4 初項 a，公差 $-\frac{1}{3}$ の等差数列 $\{a_n\}$ が

(初項から第5項までの和) < -1 ……①

(第7項から第11項までの和) $> -\frac{23}{2}$ ……②

を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) さらに，この等差数列 $\{a_n\}$ のある項が $a_n=-\frac{11}{12}$ であるとき，n の値とこの数列の初項を求めよ。

STEP 2

1 初項5で公差7の等差数列と，初項6で公差4の等差数列に共通な項のうちで，2000以下のものの和を求めよ。

〈昭和女子大〉