第3講　複素数と方程式(1)　複素数

基本事項

1　虚数単位と負の数の平方根

平方して -1 となる数の1つを文字 i で表し，虚数単位という。すなわち，$i^2=-1$ である。

この i を用いて，$-a$ $(a>0)$ の平方根は，$\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i$ と表せる。

2　複素数

a，b を実数とするとき，虚数単位 i を用いて，$a+bi$ の形で表される数を複素数という。

複素数 $a+bi$ の a を実部，b を虚部という。

複素数 $a+bi$ は，$\begin{cases} \text{虚部が } 0\text{，すなわち } b=0 \text{ のとき，実数 } a \text{ を表す。} \\ \text{虚部が } 0 \text{ でない，すなわち } b\neq 0 \text{ のとき，虚数という。} \end{cases}$

虚数のうち，実部が0，すなわち $a=0$，$b\neq0$ のものを，純虚数という。

複素数

実数	虚数
0	$2+3i$
-5	純虚数
$\sqrt{2}$	$4i$

複素数の相等条件

2つの複素数 $a+bi$ と $c+di$ $(a,\ b,\ c,\ d$ は実数$)$ が等しい条件は

$a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c$ かつ $b=d$

特に，$a+bi=0 \Longleftrightarrow a=b=0$

3　複素数の四則演算

$a>0$ のとき，$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　　特に，$\sqrt{-1}=i$

$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}\neq\sqrt{ab}$ であるため，$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ のように直してから計算する。

複素数でも実数と同様に，結合法則，交換法則，分配法則が成り立つ。

また，複素数 α，β について

$\alpha\beta=0 \Longleftrightarrow \alpha=0$ または $\beta=0$

が成り立つ。

a，b，c，d が実数のとき，次のように計算する。

(1)　加法　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

(2)　減法　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

(3)　乗法　
$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di)&=ac+(ad+bc)i+bdi^2\\&=(ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

(4)　除法　
$$\begin{aligned}\frac{a+bi}{c+di}&=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\\&=\frac{ac+(-ad+bc)i-bdi^2}{c^2-d^2i^2}\\&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i\quad(\text{ただし，}c+di\neq0)\end{aligned}$$

i を文字とみなして，文字を含む式と同じように計算し，i^2 が現れたら，-1 に置き換えればよい。

4　共役な複素数

(1)　複素数 $\alpha=a+bi$ $(a,\ b$ は実数$)$ に対して，$a-bi$ を α と共役な複素数といい，$\overline{\alpha}$ で表す。

(2)　共役な2つの複素数の和と積は実数となる。

3(4)の除法では，分母と共役な複素数を分母・分子にかけて，分母の実数にした。

また，α が虚数のとき，$\alpha-\overline{\alpha}$ は純虚数となる。

例題 1

次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

(1)　$x-5i=3+yi$　　　　(2)　$(x+y-2)+(2x-y+5)i=0$

解答　(1)　x，y は実数であるから，複素数の相等条件より

$$\begin{cases} x=3 \\ -5=y \end{cases} \quad \longleftarrow a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=c,\ b=d$$

よって，$x=3$，$y=-5$

(2)　$x+y-2$，$2x-y+5$ は実数であるから，複素数の相等条件より

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x-y+5=0 \end{cases} \quad \longleftarrow a+bi=0 \Longleftrightarrow a=0,\ b=0$$

よって，$x=-1$，$y=3$

正解へのアクセス

2 つの複素数が等しい条件は，実部どうし，虚部どうしが等しくなることであるから，両辺の実部と虚部をそれぞれ比較する。

類題 1

次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

(1)　$2x+3i=6-yi$　　　　(2)　$(3x-y-1)+(x+2y-5)i=0$

例題 2

次の計算をせよ。

(1)　$(2-5i)+(-3+8i)$　　　　(2)　$(2-5i)-(-3+8i)$

(3)　$(2-5i)(-3+8i)$　　　　(4)　$\dfrac{2-5i}{-3+8i}$

解答　(1)　与式$=(2-3)+(-5+8)i=-1+3i$　　$\longleftarrow$ i を文字のように扱う。

(2)　与式$=(2+3)+(-5-8)i=5-13i$

(3)　与式$=-6+31i-40i^2=-6+31i-40\cdot(-1)$　　$\longleftarrow i^2=-1$

$=34+31i$

(4)　与式$=\dfrac{(2-5i)(-3-8i)}{(-3+8i)(-3-8i)}=\dfrac{-6-i+40i^2}{(-3)^2-(8i)^2}$　　$\longleftarrow$ $-3+8i$ と共役な複素数 $-3-8i$ を分母・分子にかける。

$=\dfrac{-6-i-40}{9+64}=-\dfrac{46}{73}-\dfrac{1}{73}i$

正解へのアクセス

i を文字のように扱い，i^2 が現れたら，-1 に置き換える。
分母に i を含む式は，分母と共役な複素数を分母・分子にかけて，分母を実数にする。

類題 2

次の計算をせよ。

(1)　$(1-4i)+(3+2i)$　　　　(2)　$(1-4i)-(3+2i)$

(3)　$(1-4i)(3+2i)$　　　　(4)　$\dfrac{1-4i}{3+2i}$

例題 3

次の計算をせよ。

(1) $\sqrt{-3}\times\sqrt{-12}$　(2) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-12}}$　(3) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-12}}$

解答

(1) 与式$=\sqrt{3}\,i\times2\sqrt{3}\,i=6i^2=-6$　$\longleftarrow\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i\ (a>0)$

(2) 与式$=\dfrac{\sqrt{3}\,i}{2\sqrt{3}\,i}=\dfrac{1}{2}$　$\longleftarrow$分母・分子は$\sqrt{3}\,i$で約分できる。

(3) 与式$=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\,i}=\dfrac{1}{2i}=\dfrac{-i}{2i\cdot(-i)}=\dfrac{-i}{-2i^2}=-\dfrac{1}{2}i$　$\longleftarrow$ i と共役な複素数は $-i$

正解へのアクセス

(1)で，$\sqrt{-3}\times\sqrt{-12}=\sqrt{(-3)\times(-12)}=\sqrt{36}=6$ とするのは誤り。$\sqrt{-a}$ ($a>0$) の形が出てきたら，$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ と変形する。

類題 3

次の計算をせよ。

(1) $\sqrt{-45}\times\sqrt{-5}$　(2) $\dfrac{\sqrt{-5}}{\sqrt{-45}}$　(3) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{-45}}$

例題 4

$\alpha=3-4i$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha+\overline{\alpha}$　(2) $\alpha\overline{\alpha}$　(3) $\alpha^2+(\overline{\alpha})^2$

解答

$\overline{\alpha}=3+4i$ である。　$\longleftarrow\overline{a+bi}=a-bi$

(1) $\alpha+\overline{\alpha}=(3-4i)+(3+4i)=6$　$\longleftarrow\alpha+\overline{\alpha}$ は必ず実数となる。

(2) $\alpha\overline{\alpha}=(3-4i)(3+4i)$

$=9-16i^2$

$=9+16=25$　$\longleftarrow\alpha\overline{\alpha}$ は必ず実数となる。

(3) $\alpha^2+(\overline{\alpha})^2=(\alpha+\overline{\alpha})^2-2\alpha\overline{\alpha}$　$\longleftarrow\alpha+\overline{\alpha}$ と $\alpha\overline{\alpha}$ を用いて表すと，(1)，(2)の結果を利用できる。

$=6^2-2\cdot25$

$=36-50=-14$

正解へのアクセス

$\alpha+\overline{\alpha}$ と $\alpha\overline{\alpha}$ は必ず実数となる。このことを意識して計算するとよい。

類題 4

$\alpha=-5+3i$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha+\overline{\alpha}$　(2) $\alpha\overline{\alpha}$　(3) $\alpha^2+(\overline{\alpha})^2$

◆ 演　習　問　題 ◆

1 次の計算をせよ。▶例題 2

(1) $3(1-i)-2(4-3i)$

(2) $(2+i)(3-2i)-3+5i$

(3) $(\sqrt{2}-3i)^2$

(4) $\dfrac{4}{3+i}-\dfrac{8i}{3-i}$

(5) $\dfrac{2+i}{2-i}-\dfrac{1-2i}{1+2i}$

(6) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$

2 次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。▶例題 1，例題 2

(1) $(3-2i)x+(2+3i)y=6-17i$

(2) $\dfrac{2x+3+yi}{x+2i}=3-i$

3 a を実数とする。$z=(a-2i)(3+4i)$ が実数となるような a の値を求めよ。
また，そのときの z の値を求めよ。▶例題 1，例題 2

4 $x=\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}$，$y=\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i}$ のとき，次の式の値を求めよ。▶例題 4

(1) $x+y$

(2) x^3+y^3

5 次の問いに答えよ。▶例題 2

(1) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^3$ を計算せよ。

(2) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{100}$ を計算せよ。

応　用　問　題

STEP 1

1　a，b を実数とする。$(3+2i)(1-5i)=(13+ai)(1-bi)$ が成り立つとき，a，b の値を求めよ。

2　0 でない複素数 $\alpha=a+bi$（a，b は実数）に対して

$$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}=2$$

を満たす z を $z=x+yi$（x，y は実数）とするとき，x と y の間に成り立つ関係式を求めよ。

3　$z=-\sqrt{5}+i$ のとき，$z^4+\sqrt{5}z^3+z^2+4\sqrt{5}z$ の値を求めよ。

4　$z=x+yi$（x，y は実数）が $z^2=1-\sqrt{3}i$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　x^2+y^2 の値を求めよ。

(2)　z の値を求めよ。

STEP 2

1　α と β が虚数であるとき，$\alpha\beta$ が実数ならば，β は α と共役な複素数 $\overline{\alpha}$ の実数倍であることを証明せよ。

2　$(1+pi)^4=q-24i$ を成り立たせる整数 p，q の値を求めよ。