

## 目 次

第 1 講	式と証明(1)	2
第 2 講	式と証明(2)	7
第 3 講	複素数と方程式(1)	12
第 4 講	複素数と方程式(2)	17
第 5 講	複素数と方程式(3)	22
第 6 講	図形と方程式(1)	27
第 7 講	図形と方程式(2)	32
第 8 講	図形と方程式(3)	37
第 9 講	図形と方程式(4)	42
第 10 講	三角関数(1)	47
第 11 講	三角関数(2)	52
第 12 講	三角関数(3)	57
第 13 講	三角関数(4)	62
第 14 講	指数・対数関数(1)	67
第 15 講	指数・対数関数(2)	72
第 16 講	指数・対数関数(3)	77
第 17 講	微分(1)	82
第 18 講	微分(2)	87
第 19 講	微分(3)	92
第 20 講	積分(1)	97
第 21 講	積分(2)	102
第 22 講	微積分の総合問題(1)	107
第 23 講	微積分の総合問題(2)	112

## 第1講 >>> 式と証明(1)

### 基本事項

#### ① 3次の乗法公式

整式の展開の計算では、次の公式を覚えておくとよい。

- (1)  $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  ( $b \rightarrow -b$  とすると)  $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- (2)  $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$  ( $b \rightarrow -b$  とすると)  $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
- (3)  $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

#### ② 覚えておくと便利な等式

- (1)  $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$  ( $b \rightarrow -b$  とすると)  $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$
- (2)  $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc$

#### ③ 3次式の因数分解の公式

- (1)  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$      $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
- (2)  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$      $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$
- (3)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

#### ④ 二項定理

$(a+b)^n = {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1}b + \cdots + {}_n C_r a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n C_{n-1} a b^{n-1} + {}_n C_n b^n$   
 ${}_n C_r a^{n-r}b^r$  を  $(a+b)^n$  の展開式の一般項とよぶ。

また、 ${}_n C_r$  を二項係数とよぶ。

#### ⑤ 多項定理

$(a+b+c)^n$  の展開式における一般項は

$$\frac{n!}{p!q!r!} a^p b^q c^r \quad (\text{ただし, } p+q+r=n)$$

#### ⑥ 整式の除法

整式  $A$  を整式  $B$  で割ったときの商が  $Q$ 、余りが  $R$  のとき、

$$A = BQ + R \quad (R \text{ は } B \text{ よりも次数の低い整式})$$

が成り立つ。

#### ⑦ 分数式の計算

- (1) 分母の異なる分数式の加減は、まず通分して分母をそろえる。
- (2) 分母と分子が同じ因数をもつ場合は、約分して簡単にする。

### 例題 ①

次の式を展開せよ。

(1)  $(2a+b)^3 - (a-2b)^3$

(2)  $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2) + (x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

●●解答 (1) 与式  $= 8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 - (a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3)$

$$= 7a^3 + 18a^2b - 6ab^2 + 9b^3$$

(2) 与式  $= \{x^3 + (2y)^3\} + \{x^3 - (2y)^3\}$

$$= (x^3 + 8y^3) + (x^3 - 8y^3)$$

$$= 2x^3$$

$$\leftarrow (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\leftarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

## 正解へのアクセス

乗法公式にあてはめて展開する。

### 類題 1

次の式を展開せよ。

(1)  $(a+2b)^3 + (2a-b)^3$

(2)  $(3x-y)(9x^2+3xy+y^2) - (3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$

### 例題 2

次の式を因数分解せよ。

(1)  $2(a+b)^3 - a^3 - b^3$

(2)  $(x-2y)^3 - (y-2x)^3$

### 解答

(1)  $2(a+b)^3 - a^3 - b^3 = 2(a+b)^3 - (a^3 + b^3) = 2(a+b)^3 - (a+b)(a^2 - ab + b^2)$   
 $= (a+b) \{2(a+b)^2 - (a^2 - ab + b^2)\} = (a+b)(2a^2 + 4ab + 2b^2 - a^2 + ab - b^2)$   
 $= (a+b)(a^2 + 5ab + b^2)$

(2)  $(x-2y)^3 - (y-2x)^3 = \{(x-2y) - (y-2x)\} \{(x-2y)^2 + (x-2y)(y-2x) + (y-2x)^2\}$   
 $= 3(x-y)(x^2 - 4xy + 4y^2 + xy - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + y^2 - 4xy + 4x^2)$   
 $= 3(x-y)(3x^2 - 3xy + 3y^2) = 9(x-y)(x^2 - xy + y^2)$

## 正解へのアクセス

公式が使えるように項を組み合わせて変形し、共通因数があればくり出す。

### 類題 2

次の式を因数分解せよ。

(1)  $3(a-b)^3 - a^3 + b^3$

(2)  $(2x+y)^3 + (2y+x)^3$

### 例題 3

次の式を展開したときの [ ] 内の項の係数を求めよ。

(1)  $(x + \frac{1}{2})^8$  [  $x^6$  ]

(2)  $(1+x+x^2)^9$  [  $x^3$  ]

### 解答

(1) 展開式の一般項は、 ${}_8C_r x^{8-r} \cdot (\frac{1}{2})^r$  であるから、 $8-r=6$  のとき、すなわち  $r=2$  のときの係数は

$${}_8C_2 \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{1}{2^2} = 7$$

(2) 展開式の一般項は

$$\frac{9!}{p!q!r!} 1^p \cdot x^q \cdot (x^2)^r = \frac{9!}{p!q!r!} x^{q+2r} \quad (\text{ただし、} p+q+r=9)$$

$q+2r=3$ ,  $p+q+r=9$  を満たす 0 以上の整数  $p, q, r$  の組は、

$$(p, q, r) = (6, 3, 0), (7, 1, 1)$$

の 2 組であるから、求める係数は

$$\frac{9!}{6!3!0!} + \frac{9!}{7!1!1!} = 84 + 72 = 156$$

## 正解へのアクセス

まず、二項定理や多項定理を用いて一般項を求め、指定された項との次数を比較する。

**類題 3**

次の式を展開したときの[ ]内の項の係数を求めよ。

(1)  $(x + \frac{1}{3})^7$  [ $x^4$ ]

(2)  $(1+x+x^2)^8$  [ $x^{14}$ ]

**例題 4**

$A = x^4 - 2x^2 + 3x$  を整式  $B$  で割ったときの商は  $B$ 、余りは  $3x - 1$  である。このとき、整式  $B$  を求めよ。

**解答**

$$x^4 - 2x^2 + 3x = B^2 + 3x - 1$$

←  $A = BQ + R$  で  $Q = B$ ,  $R = 3x - 1$  の場合である。

$$B^2 = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$$

よって、 $B = \pm(x^2 - 1)$

**正解へのアクセス**

整式の除法の問題では、まず  $A = BQ + R$  の形の式を作ることから始める。

**類題 4**

$A = -x^4 - 4x^2 + 2x - 1$  を整式  $B$  で割ったときの商は  $-B$ 、余りは  $2x + 3$  である。このとき、整式  $B$  を求めよ。

**例題 5**

次の式を計算せよ。

(1)  $\frac{x+3}{x^2+x-6} + \frac{1}{x^2-2x}$

(2)  $\frac{2x}{x+y} + \frac{2y}{x-y} - \frac{4y^2}{x^2-y^2}$

**解答**

$$(1) \frac{x+3}{x^2+x-6} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{x+3}{(x+3)(x-2)} + \frac{1}{x(x-2)}$$

$$= \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x(x-2)} = \frac{x+1}{x(x-2)}$$

$$(2) \frac{2x}{x+y} + \frac{2y}{x-y} - \frac{4y^2}{x^2-y^2} = \frac{2x(x-y) + 2y(x+y)}{(x+y)(x-y)} - \frac{4y^2}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2y^2}{x^2-y^2} - \frac{4y^2}{x^2-y^2} = \frac{2(x^2-y^2)}{x^2-y^2} = 2$$

**正解へのアクセス**

最初に分母を因数分解しておく、通分がしやすくなる。

最後に約分ができないか調べるのを忘れないようにしよう。

**類題 5**

次の式を計算せよ。

(1)  $\frac{x-1}{x^2+4x-5} - \frac{3}{x^2+5x}$

(2)  $\frac{3y}{x+y} - \frac{3x}{x-y} + \frac{6x^2}{x^2-y^2}$

# 演習問題

## 1 次の式を展開せよ。例題①

- (1)  $(2x+3y)^3$  (2)  $(3a-5b)(9a^2+15ab+25b^2)$   
(3)  $(a-2)^3(a+2)^3$  (4)  $(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

## 2 次の式を因数分解せよ。例題②

- (1)  $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$  (2)  $(a+b)^3+(a-b)^3$   
(3)  $(a^2-a)^3-(a-1)^3$  (4)  $x^3+3px^2+(3p^2-q^2)x+p(p^2-q^2)$   
(5)  $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$  (6)  $a^6-64b^6$

## 3 次の式を展開したときの[ ]内の項の係数を求めよ。例題③

- (1)  $(3x-\frac{1}{2})^5$  [ $x^2$ ] (2)  $(x^2+x)^7$  [ $x^9$ ]  
(3)  $(x+2y+3z)^6$  [ $xy^2z^3$ ]

## 4 次の問いに答えよ。ただし、 $n$ は自然数である。

- (1)  $({}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n})-({}_{2n}C_1+{}_{2n}C_3+\cdots+{}_{2n}C_{2n-1})$ の値を求めよ。  
(2)  $\frac{{}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}}{4^n}$ の値を求めよ。

## 5 次の問いに答えよ。例題④

- (1)  $x^4$ を $x^2-x-1$ で割ったときの商と余りを求めよ。  
(2)  $x^8$ を $x^2-x-1$ で割ったときの余りを求めよ。

## 6 次の式を計算せよ。例題⑤

- (1)  $\frac{x^2-x}{4x^2-1} \times \frac{2x^2+5x+2}{x^2+3x-4} \div \frac{x+2}{x+4}$   
(2)  $(\frac{2}{x+1} + \frac{x}{x-2}) \div (\frac{x-4}{x-2} - \frac{x}{x+1})$   
(3)  $\frac{a-\frac{2}{a-1}}{\frac{a}{a-1}-2}$

# 入試問題演習

## STEP 1

1  $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$  を  $a$  についての降べきの順に整理せよ。

〈慶応大-改〉

2 次の式を因数分解せよ。

(1)  $(x-1)^3 - 27$

(2)  $(a-x)^3 + (b-x)^3 - (a+b-2x)^3$

〈愛知学院大〉

3 3次式  $4x^3 - 5x^2 + 14x + a$  が2次式  $x^2 - 2x + 5$  で割り切れるとき、 $a$  の値を求めよ。

4 次の式を計算せよ。

(1)  $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4}$

(2)  $\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6} \times \frac{2x^2+4x}{x^2+2x+1} \div \frac{x}{x+1}$

(3)  $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)}$

(4)  $\frac{\frac{1}{x} - \frac{x^2-1}{x}}{\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1}}$

## STEP 2

1  $x > 1$  である実数  $x$  に対して、 $x + \frac{1}{x} = a$  とおくとき、次の式を  $a$  を用いて表せ。

〈鳥取大-改〉

(1)  $x^3 + \frac{1}{x^3}$

(2)  $x - \frac{1}{x}$

(3)  $x^3 - \frac{1}{x^3}$

2  $(a+b)^5(a+b+2)^4$  を展開したときに現れる項  $a^4b^3$  の係数を求めよ。

〈日本女子大〉