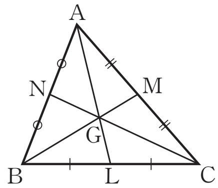
第1講　図形の性質(1)　三角形の性質

基　本　事　項

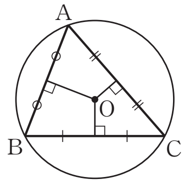
①　三角形の重心とその性質



（定義）：三角形の３本の中線は１点で交わる。
　　　　この交点を重心という。

（性質）：重心Gは，中線AL，BM，CNをそれぞれ２：１に内分する。
　　　　すなわち，AG：GL＝BG：GM＝CG：GN＝2：1

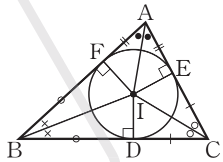
②　三角形の外心とその性質



（定義）：三角形の３辺の垂直二等分線は１点で交わる。
　　　　この交点を外心という。

（性質）：外心Oは，３頂点を通る円(外接円)の中心である。
　　　　すなわち，OA＝OB＝OC（＝外接円の半径）

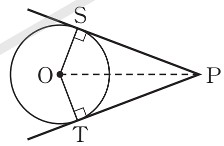
③　三角形の内心とその性質



（定義）：三角形の３つの内角の二等分線は１点で交わる。
　　　　この交点を内心という。

（性質）：内心Ｉは，３辺に接する円(内接円)の中心である。
　　　　すなわち，接点をD，E，Fとすると
　　　　　ID＝IE＝IF（＝内接円の半径）

④　接線の長さと内接円



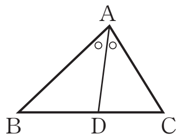
円Oの外部にある点Pから，円Oに接線PS，PTをひくと，PS＝PTとなる。このPS，PTの長さをPからの接線の長さという。

③の図のように，円が△ABCに内接するとき，AF＝AE，BD＝BF，CE＝CD

⑤　角の二等分線と比

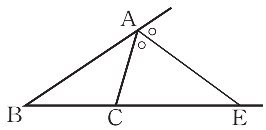
(1)　△ABCの∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとすると

　　BD：DC＝AB：AC



(2)　AB≠AC である△ABCの頂点Aにおける外角の二等分線と辺BCの延長との交点をEとすると

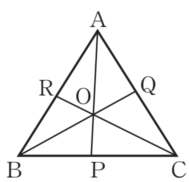
　　BE：EC＝AB：AC

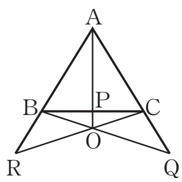


⑥　チェバの定理

点Oと△ABCにおいて，直線AO，BO，COが，３辺BC，CA，ABまたはその延長と，それぞれ点P，Q，Rで交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

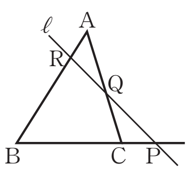




⑦　メネラウスの定理

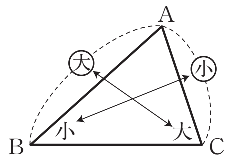
△ABCとその頂点を通らない直線ℓにおいて，直線ℓが△ABCの３辺BC，CA，ABまたはその延長と，それぞれ点P，Q，Rで交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



8 三角形の辺と角の大小関係

$\triangle ABC$において，$AC<AB \Longleftrightarrow \angle B<\angle C$
が成り立つ。



9 三角形の成立条件

正の数 a，b，c を 3 辺の長さとする三角形が存在するための条件は

$$\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases} \quad \text{または} \quad |a-b|<c<a+b$$

例題 1

$\triangle ABC$の外心をOとする。$OB=3$，$\angle OBA=22^\circ$，$\angle OCA=18^\circ$であるとき，次のものを求めよ。

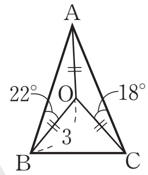
(1) OAの長さ　　(2) $\angle OBC$の大きさ

解答 (1) Oは$\triangle ABC$の外心であるから，$OA=OB=3$

(2) $\triangle OAB$，$\triangle OBC$，$\triangle OCA$はいずれも二等辺三角形であるから

$\angle OAB=\angle OBA=22^\circ$，$\angle OAC=\angle OCA=18^\circ$

$\angle OBC=\{180^\circ-(22^\circ\times2+18^\circ\times2)\}\div2=50^\circ$



正解へのアクセス

Oは△ABCの外心であるから，OA=OB=OCである。

類題 1

$\triangle ABC$の外心をOとする。$OA=7$，$\angle OBA=34^\circ$，$\angle OCB=21^\circ$であるとき，次のものを求めよ。

(1) OCの長さ　　(2) $\angle OAC$の大きさ

例題 2

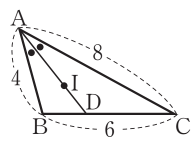
$AB=4$，$BC=6$，$CA=8$である$\triangle ABC$の内心をIとする。
直線AIと辺BCの交点をDとするとき，線分BDの長さを求めよ。

解答 Iは$\triangle ABC$の内心であるから，$\angle BAD=\angle CAD$

角の二等分線の性質より

$BD:DC=4:8=1:2$　　$\longleftarrow BD:DC=AB:AC$

よって，$BD=\dfrac{1}{1+2}BC=\dfrac{1}{3}\cdot6=2$



正解へのアクセス

Iは△ABCの内心であるから，直線AIは∠BACを2等分する。

類題 2

$AB=3$，$BC=8$，$CA=7$である$\triangle ABC$の内心をIとする。
直線AIと辺BCの交点をDとするとき，線分BDの長さを求めよ。

例題 3

次の問いに答えよ。

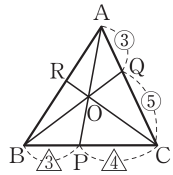
(1) △ABCにおいて，辺BCを3：4に内分する点をP，辺ACを3：5に内分する点をQとする。
また，線分APと線分BQの交点をOとし，直線COと辺ABの交点をRとする。
このとき，AR：RBを求めよ。

(2) △ABCにおいて，辺BCの延長上に点P，辺AB上に点Rを，BC=CP，AR：RB=1：3となるようにとる。
直線PRと辺ACの交点をQとするとき，AQ：QCを求めよ。

解答 (1) チェバの定理より，$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$

よって，$\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　　$\dfrac{AR}{RB}=\dfrac{4}{5}$

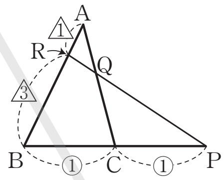
ゆえに，AR：RB=4：5



(2) メネラウスの定理より，$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$

よって，$\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{1}{3}=1$　　$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{3}{2}$

ゆえに，AQ：QC=2：3



正解へのアクセス

(1)は，3つの頂点を通る直線が1点Oで交わっているから，チェバの定理を用いる。
(2)は，△ABCを直線PRが横切っているから，メネラウスの定理を用いる。

類題 3

次の問いに答えよ。

(1) **例題3**(1)と同じ点の配置で，AR：RB=1：4，AQ：QC=6：7のとき，BP：PCを求めよ。

(2) **例題3**(2)において，PQ：QRを求めよ。

例題 4

3つの数3，6，xが三角形の3辺の長さとなるとき，xの値の範囲を求めよ。

解答 三角形の成立条件より，$|6-3|<x<6+3$　　$\longleftarrow |a-b|<c<a+b$

よって，$3<x<9$

正解へのアクセス

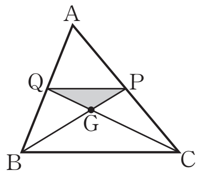
三角形の成立条件を用いる。
3辺の長さを a，b，c とすると，$a+b>c$，$b+c>a$，$c+a>b$ で，この3つをまとめると
$|a-b|<c<a+b$

類題 4

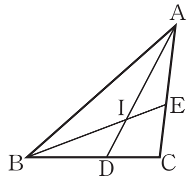
3つの数5，4，xが三角形の3辺の長さとなるとき，xの値の範囲を求めよ。

◆ 演　習　問　題 ◆

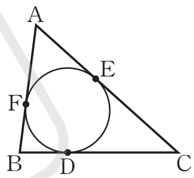
1　面積が６である△ABCの重心をGとする。直線BG，CGが辺AC，ABと交わる点をそれぞれP，Qとするとき，△GPQの面積を求めよ。



2　AB＝3，AC＝2である△ABCの内心をＩとする。直線AIと辺BCの交点をD，直線BIと辺CAの交点をEとするとき，BD＝AE であった。
　このとき，辺BCの長さを求めよ。▶例題２



3　△ABCの内接円と３辺BC，CA，ABが接する点をそれぞれD，E，Fとするとき，AFの長さをAB，BC，CAを用いて表せ。



4　内心と外心が一致する三角形はどんな三角形か。

5　△ABCの辺BCを３：２に内分する点をD，辺ABを２：５に内分する点をEとする。また，AD，CEの交点をFとし，直線BFと辺ACの交点をGとする。このとき，次の問いに答えよ。▶例題３
⑴　AG：GC を求めよ。
⑵　AF：FD を求めよ。

6　AB＞AC である△ABCの辺BC上に，点B，Cとは異なる点Pをとる。このとき，AB＞AP であることを示せ。

応　用　問　題

STEP 1

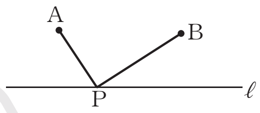
1　AB=6，BC=5，CA=4である△ABCにおいて，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をP，頂点Aにおける外角の二等分線と辺BCの延長との交点をQとする。
　このとき，PQの長さを求めよ。

2　次の問いに答えよ。

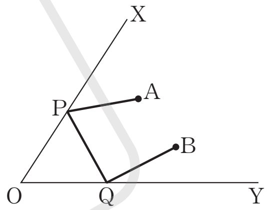
(1)　右図Ⅰのように，２点A，Bが直線ℓに関して同じ側にある。
　このとき，AP+PBを最小にするℓ上の点Pの位置を求めよ。

(2)　右図Ⅱのように，∠XOY内に２点A，Bがある。ただし，∠XOY<60°とする。
　半直線OX上に点P，半直線OY上に点Qをとるとき，AP+PQ+QBを最小にするP，Qの位置を求めよ。

（Ⅰ）



（Ⅱ）



3　鋭角三角形ABCの外心をO，内心をIとするとき

$$\angle OAI=\frac{1}{2}|\angle B-\angle C|$$

であることを示せ。

STEP 2

1　△ABCの辺ABを6：5に内分する点をR，辺ACを3：4に内分する点をQとする。線分BQと線分CRの交点をO，直線AOと辺BCの交点をPとする。このとき，$\dfrac{PO}{OA}=\boxed{\text{ア}}$である。また，△OABの面積を$S$，△ABCの面積を$T$とするとき，$\dfrac{S}{T}=\boxed{\text{イ}}$である。

2　△ABCの内部に点Pをとるとき，次のことが成り立つことを示せ。

(1)　∠BPC>∠BAC

(2)　PB+PC<AB+AC

(3)　$AB+BC+CA>PA+PB+PC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$