目　次

第1講 >>> 場合の数

基本事項

1 集合の要素の個数

集合A，Bの要素の個数$n(A)$，$n(B)$について

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

とくに，$A\cap B=\phi$ のとき　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

Uが全体集合のとき　$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

2 規則的な数えあげ

場合の数を求めるときの最も原始的な方法は，条件を満たすものをすべて書き並べることである。

その際，もれなく，しかも重複もなくすべてのものを書き並べるためには，何らかの規準を設けて規則的に並べる必要がある。その規準として，辞書式の順序がよく使われる。また，樹形図を書いて数える方法も有効である。

3 和の法則

2つのことがらA，Bについて，Aの起こり方がm通り，Bの起こり方がn通りあり，AとBが同時に起こることはないとするとき，AまたはBの起こり方は $m+n$ 通り。

4 積の法則

2つのことがらA，Bについて，Aの起こり方がm通り，そのおのおのに対してBの起こり方がn通りのとき，Aでの起こり方とBでの起こり方を組にして考えたことがらの起こり方はmn通り。

「Aの起こり方とBの起こり方を組にしたことがらの起こり方」は，「AとBがともに起こる起こり方」と表現されることもある。

例題 1

100以下の自然数のうち，次のような数の個数を求めよ。

(1)　5の倍数　　(2)　4の倍数

(3)　5または4の倍数　　(4)　5でも4でも割り切れない数

解答　100以下の自然数の集合をUとする。

(1)　5の倍数の集合をAとすると，$A=\{5\times1,\ 5\times2,\ 5\times3,\ \cdots,\ 5\times20\}$　　よって，$n(A)=20$

(2)　4の倍数の集合をBとすると，$B=\{4\times1,\ 4\times2,\ 4\times3,\ \cdots,\ 4\times25\}$　　よって，$n(B)=25$

(3)　$A\cap B$ は4と5の最小公倍数20の倍数の集合であるから

$$A\cap B=\{20\times1,\ 20\times2,\ 20\times3,\ 20\times4,\ 20\times5\}$$

よって，$n(A\cap B)=5$，5または4の倍数の集合は$A\cup B$であるから

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=20+25-5=40$$

(4)　5でも4でも割り切れない数の集合は$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$であるから　←ド・モルガンの法則

$$n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=100-40=60$$

正解へのアクセス

(3)は $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ を用いる。(4)は $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$ を用いる。

類題 1

100以下の自然数のうち，次のような数の個数を求めよ。

(1)　3の倍数　　(2)　7の倍数

(3)　3または7の倍数　　(4)　3でも7でも割り切れない数

例題 2

百円硬貨が4枚，五十円硬貨が5枚，十円硬貨が5枚ある。これらを用いて400円を支払う方法は何通りあるか。

解答　樹形図を用いて調べる。

百円硬貨	五十円硬貨	十円硬貨	
4枚	0枚	0枚	← 0枚は書かなくてもよい。
3枚	2枚	0枚	
	1枚	5枚	
2枚	4枚	0枚	
	3枚	5枚	
1枚	5枚	5枚	← 五十円硬貨と十円硬貨を全部使うと300円

よって，求める支払い方の数は6通り。

正解へのアクセス

五十円硬貨と十円硬貨を全部使うと300円であることから，百円硬貨を必ず1枚は使うので，百円硬貨を1枚使うとき，2枚使うとき，…と調べていく。樹形図が有効となる。

類題 2

百円硬貨が3枚，五十円硬貨が6枚，十円硬貨が5枚ある。これらを用いて400円を支払う方法は何通りあるか。

例題 3

大小2個のさいころを投げるとき，目の和が4以下の数になる場合は，何通りあるか。

解答　目の和が2となる事象をA，目の和が3となる事象をB，目の和が4となる事象をCとする。

事象Aが起こるのは，1通り

事象Bが起こるのは，2通り

事象Cが起こるのは，3通り

である。

AとBとCはそれぞれ同時には起こらないから，求める場合の数は

$1+2+3=6$（通り）

A：

大	1
小	1

B：

大	1	2
小	2	1

C：

大	1	2	3
小	3	2	1

正解へのアクセス

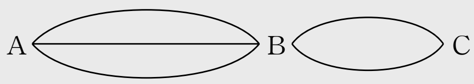
和の法則を用いて場合の数を求める。

類題 3

大小2個のさいころを投げるとき，目の和が10以上の数になる場合は，何通りあるか。

例題 4

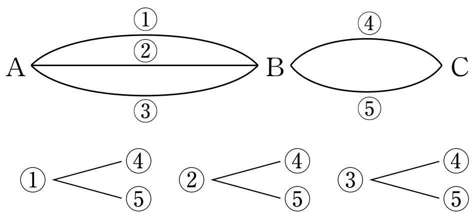
道路がA市とB市の間に3本，B市とC市の間に2本あるとき，A市からB市を経由してC市に行く方法は何通りあるか。



解答 A市からB市へ行く方法は，3通りあり，そのおのおのについて，B市からC市へ行く方法が2通りある。

よって，A市からB市を経由してC市へ行く方法の数は，積の法則により

$3\times2=6$（通り）

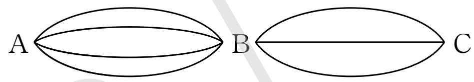


正解へのアクセス

積の法則を用いて場合の数を求める。

類題 4

道路がA市とB市の間に4本，B市とC市の間に3本あるとき，A市からB市を経由してC市に行く方法は何通りあるか。



例題 5

240の正の約数は全部で何個あるか。また，それらの総和を求めよ。

解答 240を素因数分解すると，$2^4\cdot3\cdot5$ となる。 ←

$$\begin{array}{r|r} 2 & 240 \\ \hline 2 & 120 \\ \hline 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

240の正の約数は

$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3)(1+5)$

を展開したときに，すべてのものが1回ずつ現れるから，その個数は

$5\cdot2\cdot2=20$（個）

総和は上の式を計算して

$(1+2+4+8+16)\times4\times6$ ←展開してから加えるより，(　)内を先に計算するほうが計算しやすい。

$=31\times4\times6$

$=744$

(別解)

240の約数は

$2^i\cdot3^j\cdot5^k$　($i=0$, …, 4, $j=0$, 1, $k=0$, 1)

の形で表せる。

例えば，$i=1$，$j=0$，$k=1$ は約数10に対応し，i，j，k を選ぶことが約数をつくることに対応する。

よって，240の正の約数の個数は

$5\times2\times2=20$（個）

正解へのアクセス

素因数分解がポイント。約数の作り方に着目する。

類題 5

600の正の約数は全部で何個あるか。また，それらの総和を求めよ。

演習問題

1 100から200までの整数について，次の問いに答えよ。↝例題❶

(1) 4でも6でも割り切れる数は何個あるか。

(2) 4で割り切れて，6で割り切れない数は何個あるか。

(3) 4でも6でも割り切れない数は何個あるか。

2 五百円硬貨が5枚，百円硬貨が4枚，十円硬貨が2枚ある。これらの一部または全部を用いて支払うことができる金額は何通りあるか。↝例題❷

3 千円札が3枚，五百円硬貨が5枚，百円硬貨が10枚ある。これらを用いて3000円を支払う方法は何通りあるか。

↝例題❷

4 大小2個のさいころを同時に投げて，大のさいころの目を x，小のさいころの目を y とするとき，次の条件を満たす場合はそれぞれ何通りあるか。↝例題❸

(1) $x \geqq y+1$

(2) $10 \leqq x^2+y^2 \leqq 50$

5 $x+y+z=10$，$1 \leqq x \leqq y \leqq z$ を満たす整数 x，y，z の組は何通りあるか。

6 次の問いに答えよ。

(1) 大中小3個のさいころを同時に投げて，出た目の数3つの積をつくる。積が偶数であるようなさいころの目の出方は何通りあるか。

(2) 4けたの自然数のうち，同じ数字を少なくとも2個含むものは何通りあるか。

7 2160の正の約数について，次の問いに答えよ。↝例題❺

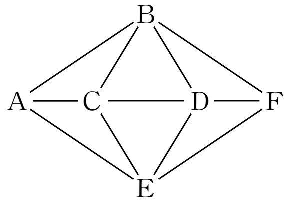
(1) 正の約数は全部で何個あるか。

(2) 正の約数全体の総和を求めよ。

入試問題演習

STEP 1

1 A，B，C，D，E，Fの6つの町が，右図のような道路で結ばれている。同じ町に2回以上行かずにAからFまで行くとき，次のような経路は何通りあるか。



(1) 最初にB町に行くような経路

(2) 最初にC町に行くような経路

(3) B，C，D，Eをすべて通る経路

2 70から500までの整数の中で，各位の数字の和が13となる数は$\boxed{}$個である。

3 2^m5^n(m，nは整数)の形の整数で，100以下であるものは$\boxed{}$個あり，それらの総和は$\boxed{}$である。ただし，2^0，5^0はともに1を表すものとする。 〈長岡技術科学大〉

4 2009の正の約数は自身も含めて$\boxed{}$個ある。 〈小樽商大〉

STEP 2

1 4つの箱と4つの球にそれぞれ1，2，3，4の番号が付けてある。箱の番号と球の番号が異なるようにして，それぞれの箱に1つずつ球を入れるとする。このような入れ方は何通りあるか求めよ。 〈東京電機大〉

2 数直線上に35以下の自然数を座標とする点が35個並んでいる。同じ点を選ぶことを許して，最初に選んだ数をmとし，2番目に選んだ数をnとする。

(1) $|m-n|\leqq 3$である場合の数を求めよ。

(2) $m+n\geqq 31$かつ$|m-n|\leqq 3$である場合の数を求めよ。

〈早稲田大〉