第7講　2次関数(1)　2次関数とグラフ

基本事項

1 関数

　2つの変数 x，y があり，x の値を定めると y の値がただ1つ定まるとき，y は x の関数であるといい，$y=f(x)$ のように表す。

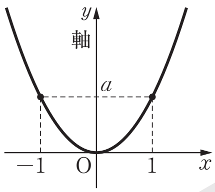
　関数 $y=f(x)$ において，$x=a$ のときの y の値を $f(a)$ と表し，これを $x=a$ における関数 $f(x)$ の値という。また，x のとり得る値の範囲をこの関数の定義域といい，この x の範囲における y のとり得る値の範囲をこの関数の値域という。値域に最大の値，最小の値があるとき，これをこの関数の最大値，最小値という。

2 2次関数のグラフ

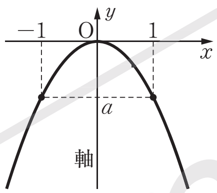
　$y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ のように，y が x の2次式で表されるとき，y は x の2次関数であるという。2次関数のグラフは放物線であり，軸と頂点がある。以下，第11講まで，基本事項では $a \neq 0$ とする。

(1)　$y=ax^2$ のグラフ

$a>0$ のとき



$a<0$ のとき



(i)　軸：y 軸（直線 $x=0$）

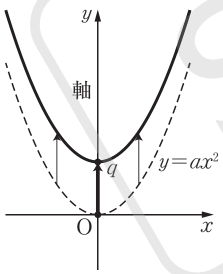
(ii)　頂点：原点（点 $(0,\ 0)$）

(iii)　グラフの形 $\begin{cases} a>0 \text{ のとき，下に凸（とつ）} \\ a<0 \text{ のとき，上に凸} \end{cases}$

（グラフは，2点 $(1,\ a)$，$(-1,\ a)$ を通る）

(2)　$y=ax^2+q$ のグラフ

$a>0$ のとき



$y=ax^2$ のグラフを

y 軸方向に q だけ

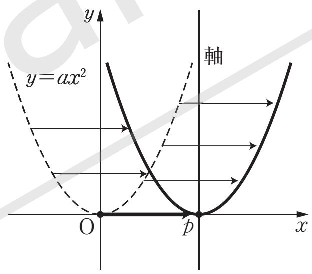
平行移動したグラフ

(i)　軸：y 軸（直線 $x=0$）

(ii)　頂点：点 $(0,\ q)$

(3)　$y=a(x-p)^2$ のグラフ

$a>0$ のとき



$y=ax^2$ のグラフを

x 軸方向に p だけ

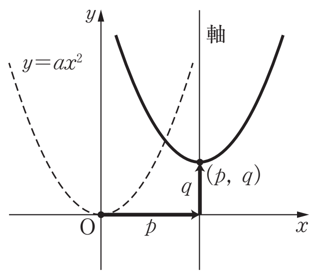
平行移動したグラフ

(i)　軸：直線 $x=p$

(ii)　頂点：点 $(p,\ 0)$

(4)　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

$a>0$ のとき



$y=ax^2$ のグラフを

x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ

平行移動したグラフ

(i)　軸：直線 $x=p$

(ii)　頂点：点 $(p,\ q)$

3 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

　$y=ax^2+bx+c$ を変形すると，$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ となる。この変形を平方完成という。

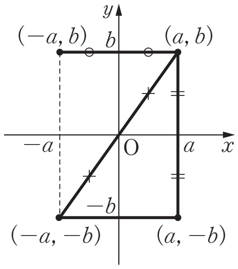
　よって，関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{b}{2a}$，y 軸方向に $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ だけ平行移動したグラフで，軸：直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$，頂点：点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

4 放物線の対称移動

右図のように，点$(a,\ b)$は，x 軸，y 軸，原点に関する対称移動で，それぞれ点$(a,\ -b)$，点$(-a,\ b)$，点$(-a,\ -b)$に移される。

一般に，関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸，y 軸，原点に関して対称移動して得られるグラフの方程式は，次のようになる。

x 軸：$-y=f(x)$　　　y 軸：$y=f(-x)$　　　原点：$-y=f(-x)$



例題 1

関数 $y=-2x+3$ $(-1\leqq x<2)$の値域を求めよ。また，最大値，最小値があれば，それを求めよ。

解答　$y=-2x+3$ において，$x=-1$ のとき，$y=-2\cdot(-1)+3=5$

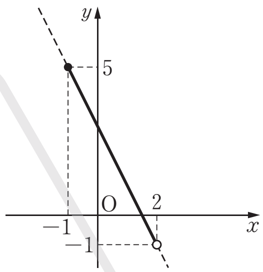
$x=2$ のとき，$y=-2\cdot2+3=-1$

よって，与えられた関数のグラフは右図の実線部分のようになり，値域は，$-1<y\leqq5$

また，最大値，最小値について

$x=-1$ のとき最大値 5，最小値はない。

(注)　グラフで，端点を含む場合は●，含まない場合は○で表す。



正解へのアクセス

1 次関数であるから，端点で最大値または最小値をとる。変域が端点を含むかどうかに注意。

類題 1

関数 $y=2x-3$ $(-2<x\leqq1)$の値域を求めよ。また，最大値，最小値があれば，それを求めよ。

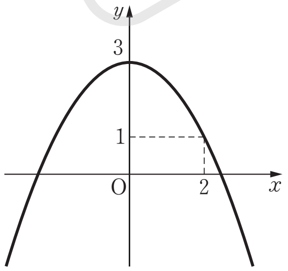
例題 2

次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+3$　　　(2)　$y=2x^2-4x+2$　　　(3)　$y=-2x^2-6x$

解答　(1)　軸は，y 軸(直線 $x=0$)

頂点は，点$(0,\ 3)$



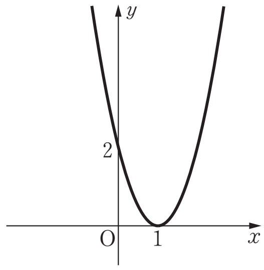
(2)　$y=2(x^2-2x)+2$

$=2\{(x-1)^2-1\}+2$

$=2(x-1)^2$

軸は，直線 $x=1$

頂点は，点$(1,\ 0)$



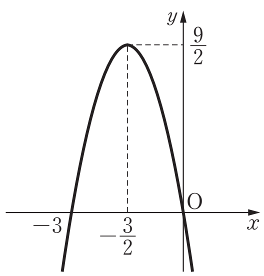
(3)　$y=-2(x^2+3x)$

$=-2\left\{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}\right\}$

$=-2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}$

軸は，直線 $x=-\dfrac{3}{2}$

頂点は，点$\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$



正解へのアクセス

平方完成して，軸と頂点を求める。また，頂点に加えてもう 1 点は通る点の座標を示すようにする。

類題 2

次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=x^2-5$　　(2)　$y=-2x^2+8x-8$　　(3)　$y=3x^2-3x$

例題 3

放物線 $y=x^2+x+1$ をどのように平行移動すると，放物線 $y=x^2-3x-4$ に重なるか。

解答　$y=x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ より，放物線 $y=x^2+x+1$ の頂点は，点$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

$y=x^2-3x-4=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}$ より，放物線 $y=x^2-3x-4$ の頂点は，点$\left(\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{25}{4}\right)$

$\dfrac{3}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2$，$-\dfrac{25}{4}-\dfrac{3}{4}=-7$ より，x 軸方向に 2，y 軸方向に -7 だけ平行移動すればよい。

正解へのアクセス

2 つの頂点が重なるときに放物線も重なるから，頂点に着目すればよい。

類題 3

放物線 $y=x^2-9x+19$ をどのように平行移動すると，放物線 $y=x^2-x+2$ に重なるか。

例題 4

放物線 $y=-x^2+2x+2$ を，次の直線または点に関して，それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点

解答　$y=-x^2+2x+2=-(x-1)^2+3$ より，$y=-x^2+2x+2$ は頂点が点$(1,\ 3)$で上に凸の放物線。

(1)　x 軸に関して対称移動すると，頂点が点$(1,\ -3)$で下に凸の放物線となるから
　　$y=(x-1)^2-3=x^2-2x-2$

(2)　y 軸に関して対称移動すると，頂点が点$(-1,\ 3)$で上に凸の放物線となるから
　　$y=-(x+1)^2+3=-x^2-2x+2$

(3)　原点に関して対称移動すると，頂点が点$(-1,\ -3)$で下に凸の放物線となるから
　　$y=(x+1)^2-3=x^2+2x-2$

(別解)

(1)　y を $-y$ に置き換えて，$-y=-x^2+2x+2$　　$y=x^2-2x-2$

(2)　x を $-x$ に置き換えて，$y=-(-x)^2+2(-x)+2$　　$y=-x^2-2x+2$

(3)　x を $-x$，y を $-y$ に置き換えて，$-y=-(-x)^2+2(-x)+2$　　$y=x^2+2x-2$

正解へのアクセス

もとの放物線の頂点を求めて，頂点を対称移動して考えればよい。その際，上に凸か下に凸かに注意。

類題 4

放物線 $y=x^2+4x-1$ を，次の直線または点に関して，それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点

◆ 演　習　問　題 ◆

1　次の関数 $f(x)$ について，$f(2)$，$f(-3)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(a+1)$ の値をそれぞれ求めよ。

(1)　$f(x)=-5x+3$

(2)　$f(x)=3x^2-2x-4$

2　次の関数の値域を求めよ。また，最大値，最小値があれば，それを求めよ。▶例題 1

(1)　$y=4x+5\quad(-4\leqq x<0)$

(2)　$y=-3x-2\quad(-2<x<3)$

3　次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。▶例題 2

(1)　$y=3x^2+6x+1$

(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x-2$

(3)　$y=-2(x-2)(x-3)$

4　次の問いに答えよ。▶例題 3

(1)　放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に 4，y 軸方向に -3 だけ平行移動すると，放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-4x+7$ に重なるとき，a，b，c の値を求めよ。

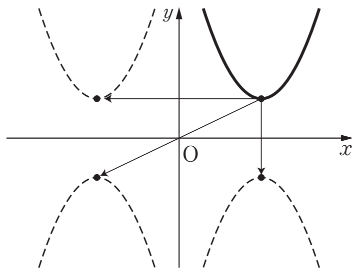
(2)　放物線 $y=x^2+ax+2$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に -1 だけ平行移動すると，放物線 $y=x^2-5x+b$ に重なるとき，a，b の値を求めよ。

5　放物線 $y=2x^2-12x+20$ を，次の直線や点に関して，それぞれ対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。▶例題 4

(1)　x 軸

(2)　y 軸

(3)　原点



6　2 つの放物線 $y=2x^2+8ax+5$，$y=-x^2+2bx-b^2+b-1$ の頂点が一致するとき，a，b の値と，頂点の座標を求めよ。

7　放物線 $y=x^2+2x+4$ を次のように平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(1)　x 軸方向に 3 だけ平行移動

(2)　x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動

応　用　問　題

STEP 1

1 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=-4x+7$ の値域が $-9\leqq y<11$ のとき，定義域を求めよ。

(2) 関数 $y=ax+b$ $(-3\leqq x\leqq 1)$ の最小値が -2，最大値が 4 となるとき，a，b の値を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

(1) 次の放物線①，②を考える。

$y=x^2-2x+3$ ……①，$y=x^2+4x-1$ ……②

①は x 軸方向に p，y 軸方向に q の平行移動によって②に重なる。このとき，q の値を求めよ。

(2) 2 次関数 $y=x^2-6x+2$ のグラフ C は，$y=x^2$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ア}}$，y 軸方向に $-\boxed{\text{イ}}$ だけ平行移動したものである。また C は，$y=x^2+2x-6$ のグラフと直線 $x=\boxed{\text{ウ}}$ に関して対称であり，$y=-x^2+2x-6$ のグラフと点$(\boxed{\text{エ}}, -\boxed{\text{オ}})$に関して対称な位置にある。

(3) 放物線 $y=-x^2+3ax+5$ を x 軸方向に -9 だけ平行移動し，それから y 軸に関して対称移動するともとの放物線に一致した。このとき，a の値を求めよ。

(4) 放物線 $y=x^2-4x+m$ を原点に関して対称移動し，次に x 軸方向に $2p$，y 軸方向に p だけ平行移動した放物線は，点$(4, 0)$で x 軸に接するという。このとき，m，p の値を求めよ。

(5) 2 次関数 $y=-3x^2+12x-7$ のグラフは，$y=3x^2$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ア}}$ だけ平行移動し，x 軸に関して対称に折り返し，さらに y 軸方向に $\boxed{\text{イ}}$ だけ平行移動したものである。

STEP 2

1 放物線 $C : y=ax^2+bx+c$ を y 軸方向に -4 だけ平行移動してできる放物線は，原点Oおよび他の 1 点Aで x 軸と交わり，点Pを頂点にもつ。

(1) c の値を求めよ。

(2) 点Pの座標を a，b を用いて表せ。

(3) 放物線 C が点$(-1, 0)$を通り，かつ△POAが直角三角形となるとき，a，b の値を求めよ。