第4講　指数関数・対数関数

必　須　事　項

1　指数と指数関数

(1)　累乗根

n が正の整数のとき，n 乗すると a になる数，すなわち，$x^n=a$ を満たす x の値を a の n 乗根という。2乗根(平方根)，3乗根(立方根)，4乗根，……をまとめて，累乗根という。

0の n 乗根は0のみである。すなわち，$\sqrt[n]{0}=0$ である。

$a\neq 0$ のとき，a の n 乗根は実数の範囲で次のようになる。

(i)　n が奇数のとき

a の n 乗根はただ1つあり，これを $\sqrt[n]{a}$ と表す。

(ii)　n が偶数のとき

$a>0$ のとき，a の n 乗根は正と負の2つあり，正のものを $\sqrt[n]{a}$，負のものを $-\sqrt[n]{a}$ と表す。

$a<0$ のとき，a の n 乗根は存在しない。

また，$a>0$，$b>0$ で，m，n が正の整数のとき

$\boxed{1}$　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　$\boxed{2}$　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　　$\boxed{3}$　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　　$\boxed{4}$　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

(2)　指数の拡張

$a\neq 0$ で，n が整数のとき，$a^0=1$，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

$a>0$ で，m，n が正の整数，p が正の有理数のとき，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$，$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$

特に，$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

(3)　指数法則

$a>0$，$b>0$ で，p，q が実数のとき

$\boxed{1}$　$a^pa^q=a^{p+q}$　　$\boxed{2}$　$(a^p)^q=a^{pq}$　　$\boxed{3}$　$(ab)^p=a^pb^p$

$\boxed{1}'$　$\dfrac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$　　$\boxed{3}'$　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^p=\dfrac{a^p}{b^p}$

(4)　指数関数のグラフ

$a>0$，$a\neq 1$ とするとき，$y=a^x$ は x の関数である。この関数を a を底とする指数関数といい，次のような性質がある。

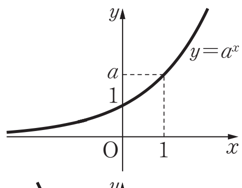
(i)　定義域は実数全体で，値域は正の実数全体である。

(ii)　グラフは点$(0,\ 1)$，$(1,\ a)$を通り，x 軸を漸近線とする。

(iii)　$p=q \iff a^p=a^q$

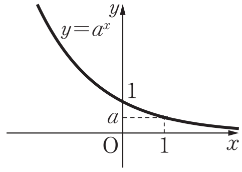
$a>1$ のとき，指数関数 $y=a^x$ のグラフは右の図のようになる。このグラフは右上がり(増加関数)であり

$p<q \iff a^p<a^q$



$0<a<1$ のとき，指数関数 $y=a^x$ のグラフは右の図のようになる。このグラフは右下がり(減少関数)であり

$p<q \iff a^p>a^q$



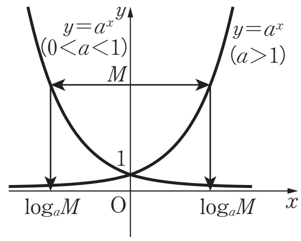
2 対数と対数関数

(1) 対数の定義

一般に，$a>0$，$a\neq1$ とするとき，任意の正の数 M に対して $M=a^x$ を満たす x の値がただ1つ定まる。この x を $\log_a M$ と表し，a を底とする M の対数という。M をこの対数の真数という。

$a>0$，$a\neq1$，$M>0$ のとき

$$a^x=M \iff x=\log_a M$$



(2) 対数の性質

$a>0$，$a\neq1$，$M>0$，$N>0$ で，k が実数のとき

(i) $\log_a 1=0$，$\log_a a=1$，$\log_a a^k=k$　(ii) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

(iii) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$　(iv) $\log_a M^k=k\log_a M$　(v) $a^{\log_a M}=M$

(3) 底の変換公式

a，b，c が正の数で，$a\neq1$，$c\neq1$ のとき

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(4) 対数関数のグラフ

$a>0$，$a\neq1$ とするとき，$y=\log_a x$ は x の関数である。この関数を a を底とする対数関数といい，次のような性質がある。

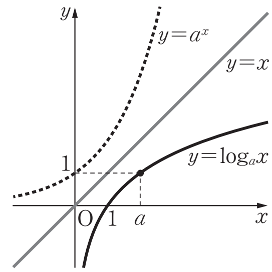
(i) 定義域は正の実数全体で，値域は実数全体である。

(ii) グラフは点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通り，y 軸を漸近線とし，$y=a^x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称である。

(iii) $p=q \iff \log_a p=\log_a q$

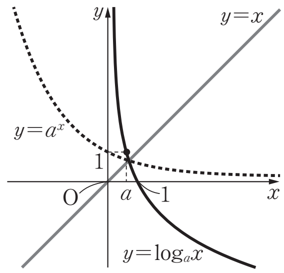
$a>1$ のとき，対数関数 $y=\log_a x$ のグラフは右の図のようになる。このグラフは右上がり（増加関数）であり，$p>0$，$q>0$ のとき

$$p<q \iff \log_a p<\log_a q$$



$0<a<1$ のとき，対数関数 $y=\log_a x$ のグラフは右の図のようになる。このグラフは右下がり（減少関数）であり，$p>0$，$q>0$ のとき

$$p<q \iff \log_a p>\log_a q$$



(5) 常用対数と桁数

10を底とする対数を常用対数という。

1より大きい正の数 N について

N の整数部分が n 桁 $\iff 10^{n-1}\leqq N<10^n \iff n-1\leqq\log_{10}N<n$

1より小さい正の数 M について

M は小数第 m 位に初めて0でない数字が現れる $\iff 10^{-m}\leqq M<10^{-m+1} \iff -m\leqq\log_{10}M<-m+1$

例題 1 ［累乗根の計算］ ➡ 1

次の計算をせよ。

(1) $\sqrt[4]{27}\sqrt[4]{12}\sqrt[4]{4}$　　(2) $(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})$

解答

(1) $\sqrt[4]{27}\sqrt[4]{12}\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{27\times12\times4}=\sqrt[4]{3^3\times2^2\cdot3\times2^2}=\sqrt[4]{2^4\cdot3^4}=2\cdot3=6$

(2) $(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9})=(\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3})\{(\sqrt[3]{5})^2-\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^2\}$

$$=(\sqrt[3]{5})^3+(\sqrt[3]{3})^3=5+3=8$$

類題 1 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{\sqrt[3]{48}\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{18}}$　　(2) $(\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{6}-\sqrt[4]{4})(\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{6}-\sqrt[4]{9})$

例題 2 ［指数方程式，指数不等式］ ➡ 1

次の方程式，不等式を解け。

(1) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{2x-3}=27$　　(2) $8^x<4$

解答

(1) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{2x-3}=(3^{-2})^{2x-3}=3^{-4x+6}$，$27=3^3$ より，$3^{-4x+6}=3^3$

よって，$-4x+6=3$ より，$x=\dfrac{3}{4}$

(2) $8^x=(2^3)^x=2^{3x}$，$4=2^2$ より，$2^{3x}<2^2$

底は 2 で 1 より大きいから，$3x<2$

よって，$x<\dfrac{2}{3}$

類題 2 次の方程式，不等式を解け。

(1) $5^{\frac{x+1}{6}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$　　(2) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{2x-1}<\dfrac{1}{16}$

例題 3 ［対数の計算］ ➡ 2

次の計算をせよ。

(1) $\log_3 12+\log_3 36-2\log_3 4$　　(2) $(\log_2 3+\log_8 9)(\log_3 4+\log_9 32)$

解答

(1) $\log_3 12+\log_3 36-2\log_3 4=\log_3 12+\log_3 36-\log_3 16$

$$=\log_3\frac{12\times36}{16}=\log_3 27=3$$

(2) $(\log_2 3+\log_8 9)(\log_3 4+\log_9 32)=\left(\log_2 3+\dfrac{\log_2 9}{\log_2 8}\right)\left(\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 32}{\log_2 9}\right)$

$$=\left(\log_2 3+\frac{2\log_2 3}{3}\right)\left(\frac{2}{\log_2 3}+\frac{5}{2\log_2 3}\right)$$

$$=\frac{5}{3}\log_2 3\times\frac{9}{2\log_2 3}=\frac{15}{2}$$

類題 3 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{1}{2}\log_2 36-2\log_2 3+\log_2 24$　　(2) $\log_3\sqrt[3]{2}\times\log_{16}125\times\log_5 9$

例題4　［対数方程式］➡**2**

方程式 $2\log_2(x+13)=2+\log_2(-x+2)$ を解け。

解答

真数は正であるから，$x+13>0$，$-x+2>0$ より

$$-13<x<2$$

方程式を変形すると

$$\log_2(x+13)^2=\log_2 2^2+\log_2(-x+2)$$

$$\log_2(x+13)^2=\log_2 4(-x+2)$$

$$(x+13)^2=4(-x+2)$$

$$x^2+30x+161=0$$

$$(x+7)(x+23)=0$$

$-13<x<2$ より，求める解は

$$x=-7$$

類題4　方程式 $\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1+\log_3(-x+1)$ を解け。

例題5　［常用対数と桁数］➡**2**

15^{50} は何桁の数か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答

15^{50} の常用対数をとると

$$\begin{aligned}\log_{10}15^{50}&=\log_{10}\left(\frac{30}{2}\right)^{50}\\&=50\log_{10}\frac{10\times3}{2}\\&=50\times(\log_{10}10+\log_{10}3-\log_{10}2)\\&=50\times(1+0.4771-0.3010)\\&=58.805\end{aligned}$$

より

$$58<\log_{10}15^{50}<59$$

したがって

$$10^{58}<15^{50}<10^{59}$$

よって，15^{50} は59桁の数である。

類題5　$\left(\frac{5}{12}\right)^{10}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数が現れるか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

標　準　問　題

1 関数 $y=\frac{1}{16}\cdot 2^x-3$ のグラフは，関数 $y=2^x$ のグラフをどのように平行移動したものか。

2 次の 4 つの数の大小を比較せよ。

$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{5}$，$\sqrt[4]{10}$，$\sqrt[6]{30}$

3 次の方程式を解け。

(1)　$2^x=3^{2x+5}$

(2)　$2(4^x-1)-2^{x-1}+2^{-x-1}=0$

4 連立方程式 $\begin{cases} 2^{x+2}+3^{y+4}=515 \\ 2^x+3^{y+3}=129 \end{cases}$ を解け。

5 不等式 $3\cdot 9^{1-x}-4\cdot 3^{1-x}+1\leqq 0$ を解け。

6 不等式 $2a^{1-x}+a^x<1+2a$ を解け。ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする。

7 次の問いに答えよ。

(1) $3^x=2$ のとき，$\dfrac{9^x+9^{-2x}}{3^{3x}+3^{-4x}}$ の値を求めよ。

(2) $2^x-2^{-x}=5$ のとき，8^x+8^{-x} の値を求めよ。

8 $a^{2x}=4+\sqrt{15}$ のとき，次の式の値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

(1) a^{-2x}　　(2) $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$　　(3) $a^{4x}+a^{-4x}$

9 $1<x\leqq 2$ のとき，関数 $y=4^x-6\cdot 2^x+10$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

10 関数 $y=2\cdot 3^x+6\cdot 3^{-x}$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

11 関数 $y=4^x+4^{-x}-2^x-2^{-x}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $2^x+2^{-x}=t$ とおいて，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) y を t を用いて表せ。

(3) y の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

12 $\log_5 3=a$，$\log_2 3=b$ として，次の値を a，b を用いて表せ。

(1) $\log_2 6$　　(2) $\log_3 5$　　(3) $\log_2 5$　　(4) $\log_{10} 6$

13 関数 $y=\log_2 2(x-1)$ のグラフは，関数 $y=\log_2 x$ のグラフをどのように平行移動したものか。

14 次の 3 つの数の大小を比較せよ。

$2\log_{0.2}3$，$-\log_5 3$，-1

15 次の方程式を解け。

(1) $(\log_3 x)^2-\log_3 x^3-10=0$

(2) $\log_2 x=\log_x 16+3$

16 連立方程式 $\begin{cases} \log_x y+2\log_y x=3 \\ \log_x(y^2+xy)=2 \end{cases}$ を解け。

17 次の不等式を解け。

(1) $\log_2 x \geqq \log_{0.5}\dfrac{x-2}{8}$

(2) $(\log_3 x)^2-3\log_3 x^2+5<0$

18 不等式 $2\log_a(5-x)<\log_a 4x$ を解け。ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする。

19 $xyz \neq 0$，$4^x = 5^y = 10^z$ のとき，等式 $\dfrac{2}{z} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y}$ を証明せよ。

20 関数 $y = 2(\log_2 2x)^2 + \log_{\sqrt{2}} x^2 + 7$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

21 関数 $y = \log_2 x + \log_2(8 - x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

22 $x > 1$ のとき，関数 $y = \log_2 x + \log_x 64$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

23 $N = 5^{30}$ について，次の問いに答えよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1) N の桁数を求めよ。

(2) N の最高位の数字を答えよ。

24 光があるガラス1枚を通過すると，その明るさは通過する前の $\dfrac{7}{8}$ 倍になるという。光の明るさが初めてもとの1%より小さくなるのは，ガラスを何枚通過したときか。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする。

共通テスト型演習

特に指示がない限り，各空欄のア，イ，ウ，…には符号(−)や数字(0〜9)のうち当てはまるものを答えよ。選択肢が与えられている場合は，当てはまる選択肢の番号を答えよ。

1 連立方程式

$$\begin{cases} xy=128 & \cdots\cdots① \\ \dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_2 y}=\dfrac{7}{12} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

を満たす正の実数 x，y を次の**方針**で求める。ただし，$x \neq 1$，$y \neq 1$ とする。

方針

①，②が x と y を入れかえても変わらず対称性をもつことを利用して，2 数 $\log_2 x$，$\log_2 y$ の和と積から 2 次方程式をつくる。

①の両辺の 2 を底とする対数をとると，$\log_2 x+\log_2 y=\boxed{\text{ア}}$

これと②より，$(\log_2 x)(\log_2 y)=\boxed{\text{イウ}}$

であるから，2 数 $\log_2 x$，$\log_2 y$ は 2 次方程式 $\boxed{\text{エ}}$ を満たす。

よって，連立方程式の解は

$(x,\ y)=(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カキ}})$ または $(x,\ y)=(\boxed{\text{カキ}},\ \boxed{\text{オ}})$

である。

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ $t^2+7t+12=0$	① $t^2-7t+12=0$	② $t^2+7t-12=0$	③ $t^2-7t-12=0$

2 x，y，z は正の数で $2^x=\left(\dfrac{5}{2}\right)^y=3^z$ を満たしているとする。

与えられた等式の各辺の 3 を底とする対数をとると，$x\log_3 2=y\log_3\dfrac{5}{2}=z$ となることから，x，y，z の大小関係については $\boxed{\text{ア}}$ であることがわかる。

では，$a=2x$，$b=\dfrac{5}{2}y$，$c=3z$ とおくとき，a，b，c の大小関係はどうなるだろうか。

$a-c=x(\boxed{\text{イ}}-\boxed{\text{ウ}}\log_3 2)$

$b-c=\dfrac{y}{2}\left(\boxed{\text{エ}}-\boxed{\text{オ}}\log_3\dfrac{5}{2}\right)$

であるから，a，b，c の大小関係は $\boxed{\text{カ}}$ となる。必要に応じて $3^5<\left(\dfrac{5}{2}\right)^6$ であることを用いてもよい。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ $x<y<z$	① $x<z<y$	② $y<x<z$
③ $y<z<x$	④ $z<x<y$	⑤ $z<y<x$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ $a<b<c$	① $a<c<b$	② $b<a<c$
③ $b<c<a$	④ $c<a<b$	⑤ $c<b<a$

3 実数 x，y が $x \geqq 2$ かつ $y \geqq 2$ かつ $8 \leqq xy \leqq 16$ を満たすとき，$z=\log_2\sqrt{x}+\log_2 y$ の最大値と最小値を次の**構想**に基づいて求める。

構想

$s=\log_2 x$，$t=\log_2 y$ とおき，x，y についての条件を s，t についての条件として表し，st 平面における領域を考える。z を s，t で表し，st 平面において z が表す図形的な意味から z の最大値と最小値を考える。

$s=\log_2 x$，$t=\log_2 y$ とおくと，条件 $x \geqq 2$ かつ $y \geqq 2$ かつ $8 \leqq xy \leqq 16$ は

$s \geqq \boxed{\text{ア}}$ かつ $t \geqq \boxed{\text{イ}}$ かつ $\boxed{\text{ウ}}$

となる。

$z=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}s+t$ であるから，z は st 平面において $\boxed{\text{カ}}$ であり

$s=\boxed{\text{キ}}$，$t=\boxed{\text{ク}}$，すなわち $x=\boxed{\text{ケ}}$，$y=\boxed{\text{コ}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$

$s=\boxed{\text{ス}}$，$t=\boxed{\text{セ}}$，すなわち $x=\boxed{\text{ソ}}$，$y=\boxed{\text{タ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{チ}}$

をとる。

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

⓪ $3 \leqq st \leqq 4$	① $4 \leqq st \leqq 8$
② $3 \leqq s+t \leqq 4$	③ $4 \leqq s+t \leqq 8$

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ 傾きが正で一定の直線と s 軸との交点の s 座標
① 傾きが正で一定の直線と t 軸との交点の t 座標
② 傾きが負で一定の直線と s 軸との交点の s 座標
③ 傾きが負で一定の直線と t 軸との交点の t 座標

4 $10^{-5}<\left(\dfrac{8}{15}\right)^n<10^{-4}$ を満たす自然数 n について考える。

以下では，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ として答えよ。

(1) 与えられた不等式の各辺の10を底とする対数をとると

$\boxed{\text{アイ}}<n\log_{10}\dfrac{8}{15}<\boxed{\text{ウエ}}$

となる。

$\log_{10}\dfrac{8}{15}=\boxed{\text{オ}}\log_{10}2-\log_{10}3-\boxed{\text{カ}}$ であるから，与えられた不等式を満たす自然数 n の値は $\boxed{\text{キ}}$ 個ある。

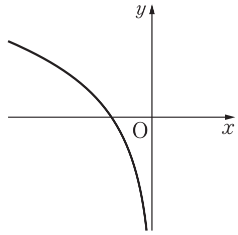
(2) (1)の $\boxed{\text{キ}}$ 個の n の値のうち小さい方から 2 番目の値である $n=\boxed{\text{クケ}}$ について考える。

$\log_{10}\left(\dfrac{8}{15}\right)^{\boxed{\text{クケ}}}$ を超えない最大の整数を a とすると，$a=\boxed{\text{コサ}}$ である。

$\log_{10}\left(\dfrac{8}{15}\right)^{\boxed{\text{クケ}}}=a+b$

と表したときの b の値について，$\log_{10}m<b<\log_{10}(m+1)$ を満たす自然数 m の値は $m=\boxed{\text{シ}}$ であるから，$\left(\dfrac{8}{15}\right)^{\boxed{\text{クケ}}}$ を小数で表したとき，小数第 $\boxed{\text{ス}}$ 位に初めて 0 でない数 $\boxed{\text{シ}}$ が現れる。

5 a を 1 以外の正の数，b を 0 以外の実数とし，関数 $y=\log_a bx$ のグラフについて考える。



(1) a と b の値を 1 つ決めてコンピュータソフトを使ってグラフをかいたところ，右の図のようになった。このとき，a と b の値として適するものは $\boxed{\text{ア}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ $a=2$，$b=\frac{1}{2}$　① $a=2$，$b=-\frac{1}{2}$　② $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$　③ $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$

(2)(i) a の値を(1)のグラフと同じ値に固定して，b の値を $b>0$ の範囲で増加させていくと，グラフは $\boxed{\text{イ}}$ に平行移動する。また，グラフと x 軸の交点の x 座標の値は $\boxed{\text{ウ}}$。

(ii) b の値を(1)のグラフと同じ値に固定して，a の値を $0<a<1$ の範囲で減少させていくと，グラフと x 軸の交点の x 座標の値は $\boxed{\text{エ}}$。

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

⓪ x 軸の正の方向　① x 軸の負の方向　② y 軸の正の方向　③ y 軸の負の方向

$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ つねに増加する　① つねに減少する
② 増加することも減少することもある　③ 一定である

(3) (1)と同様に a と b の値を 1 つ決めてグラフをかく。

(i) (1)のグラフと原点に関して対称なグラフとなるのは，$\boxed{\text{オ}}$ のときである。

(ii) (1)のグラフを x 軸に関して対称移動したあと y 軸の負の方向に 2 だけ平行移動したグラフとなるのは，$\boxed{\text{カ}}$ のときである。

$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $a=2$，$b=\frac{1}{2}$　① $a=2$，$b=-\frac{1}{2}$　② $a=2$，$b=2$　③ $a=2$，$b=-2$
④ $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{2}$　⑤ $a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$　⑥ $a=\frac{1}{2}$，$b=2$　⑦ $a=\frac{1}{2}$，$b=-2$

6 以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて次の常用対数表を用いてもよい。

常用対数表

数		数		数		数		数		数		数		数	
1.0	0.0000	1.5	0.1761	2.0	0.3010	2.5	0.3979	3.0	0.4771	3.5	0.5441	4.0	0.6021	4.5	0.6532
1.1	0.0414	1.6	0.2041	2.1	0.3222	2.6	0.4150	3.1	0.4914	3.6	0.5563	4.1	0.6128	4.6	0.6628
1.2	0.0792	1.7	0.2304	2.2	0.3424	2.7	0.4314	3.2	0.5051	3.7	0.5682	4.2	0.6232	4.7	0.6721
1.3	0.1139	1.8	0.2553	2.3	0.3617	2.8	0.4472	3.3	0.5185	3.8	0.5798	4.3	0.6335	4.8	0.6812
1.4	0.1461	1.9	0.2788	2.4	0.3802	2.9	0.4624	3.4	0.5315	3.9	0.5911	4.4	0.6435	4.9	0.6902

太郎さんと花子さんは，天体の明るさを表す単位である等級に，対数の考え方が用いられていることを知り，2 つの天体の等級の違いから，明るさの違いを求める方法について考えている。ただし，等級の数値が小さいほど明るい天体であることを示す。

(1)　等級について，次の**ポグソンの式**が知られている。

ポグソンの式

等級 a の天体Aの明るさを ℓ_a，等級 b の天体Bの明るさを ℓ_b とすると

$$a-b=-2.5\log_{10}\frac{\ell_a}{\ell_b}$$

ポグソンの式を用いると

$$\log_{10}\frac{\ell_a}{\ell_b}=-\frac{2}{5}(a-b)$$

と表される。すなわち，天体Aの等級が天体Bの等級より 5 だけ小さいとすると，天体Aの明るさは天体Bの明るさの $\boxed{\text{ア}}$ 倍になる。

太郎：太陽と，満月のときの月の見かけの等級を調べると，それぞれ -26.7，-12.7 だったよ。
花子：等級の差がわかるから，太陽の明るさが満月のときの月の明るさの何倍かが求められるね。

太陽の見かけの明るさを ℓ_s，満月のときの月の見かけの明るさを ℓ_m とすると，**ポグソンの式**より

$$\log_{10}\frac{\ell_s}{\ell_m}=\boxed{\text{イ}}.\boxed{\text{ウ}}$$

であるから，太陽の明るさは，満月のときの月の明るさのおよそ $\boxed{\text{エ}}$ 倍であることがわかる。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪　0.001	①　0.01	②　0.1	③　2
④　5	⑤　10	⑥　100	⑦　1000

$\boxed{\text{エ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。

⓪　36000	①　40000	②　360000	③　400000	④　3600000	⑤　4000000

(2)　2 人がさらに調べていると，見かけの等級は地球からの距離に影響されること，地球からの距離にかかわらず天体の絶対的な明るさを示す等級である絶対等級という指標があり，見かけの等級 m と絶対等級 M の関係は，地球からの距離を d パーセク（1パーセクはおよそ3.26光年）とすると

$$m-M=-2.5\log_{10}\frac{10^2}{d^2}\quad\cdots\cdots①$$

と表されることがわかった。

太郎：①の式を用いると，ある天体の見かけの等級と絶対等級から，地球とある天体の大まかな距離を求めることができそうだね。
花子：北極星（こぐま座のポラリス）の見かけの等級 m_1 は2.02，絶対等級 M_1 は -3.59 だから，①の式を用いると，地球と北極星の間の距離を求められるね。

地球と北極星の間の距離を d_1 パーセクとすると

$$m_1-M_1=\boxed{\text{オ}}\log_{10}d_1-\boxed{\text{カ}}$$

となるから，$d_1=\boxed{\text{キ}}$ となる。

したがって，地球と北極星の間の距離は，一の位を四捨五入するとおよそ $\boxed{\text{クケコ}}$ 光年である。

$\boxed{\text{キ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから 1 つ選べ。

⓪　3.3	①　13.2	②　16.3	③　33	④　132	⑤　163

入試実戦演習

STEP 1

1 a，b，c を正の数とする。実数 x，y，z が $a^{3x}=b^{3y}=c^{3z}=27$ を満たすとき，$9^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ を a，b，c を用いて表せ。

2 不等式 $8^x-3\cdot 4^x-2^x+3>0$ を解け。

3 実数 x に対して，$t=2^x+2^{-x}$，$y=4^x-6\cdot 2^x-6\cdot 2^{-x}+4^{-x}$ とおく。次の問いに答えよ。
(1) x が実数全体を動くとき，t の最小値を求めよ。
(2) y を t の式で表せ。
(3) x が実数全体を動くとき，y の最小値を求めよ。
(4) a を実数とするとき，$y=a$ となるような x の個数を求めよ。

4 $(\log_x y)^2+(\log_y x)^2=\dfrac{17}{4}$ $(x>1,\ y>1)$ のとき，$\log_x y+\log_y x$，$(\log_x y)^3+(\log_y x)^3$ の値を求めよ。

5 x を 1 でない正の実数とし，$f(x)=(\log_2 2x)^2-5\log_2 x+3\log_x 2$ とおく。次の問いに答えよ。
(1) 方程式 $f(x)=2$ の解を求めよ。
(2) 不等式 $f(x)\geqq 2$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

6 次の問いに答えよ。
(1) n を自然数とする。2^n が 4 桁の数になるときの n を求めよ。
(2) 5^{130} は何桁の数か。

7 自然数nが不等式$38 \leqq \log_{10} 8^n < 39$を満たすとき，次の問いに答えよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$とする。

(1) 8^nの桁数を求めよ。

(2) 自然数nの値を求めよ。

(3) 8^nの一の位の数字を求めよ。

(4) 8^nの最高位の数字を求めよ。

8 光があるガラス板を通り抜けるごとに，光量は通り抜ける前の光量のa倍になる。さらに，光がこのガラス板を5枚通り抜けると，光量はもとの光量の$\dfrac{1024}{3125}$倍になることがわかっている。重ねるガラスの枚数を増やしていったとき，初めて光量がもとの光量の$\dfrac{1}{100}$以下になるのは何枚重ねたときか。小数部分を切り上げて整数で答えよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$とする。

STEP 2

1 nを自然数とするとき，3つの数$a = \sqrt[5]{1 + \dfrac{1}{n}} - 1$，$b = 1 - \sqrt[5]{1 - \dfrac{1}{n}}$，$c = \dfrac{1}{5n}$の大小を比較せよ。

2 xについての方程式$9^x + 2a \cdot 3^x + 2a^2 + a - 6 = 0$が正の解，負の解を1つずつもつとき，定数$a$のとる値の範囲を求めよ。

3 すべての実数xに対して不等式$2^{2x+2} + 2^x a + 1 - a > 0$が成り立つような実数$a$の値の範囲を求めよ。

4 $a > 1$，$b > 1$とする。$\log_a b + 2\log_b a - 3 > 0$を満たす点$(a,\ b)$の存在範囲を図示せよ。