目　次

第7講 積分法

必須事項

1 不定積分の定義

関数 $F(x)$ の導関数が $f(x)$ であるとき，$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数といい

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C \quad (C\text{は積分定数})$$

と表す。

2 不定積分の公式

(1) $\displaystyle\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

(2) $\displaystyle\int (x+a)^n\,dx=\frac{1}{n+1}(x+a)^{n+1}+C \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

(3) $\displaystyle\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx \quad (k\text{ は定数})$

(4) $\displaystyle\int \{f(x)\pm g(x)\}\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx \quad (\text{複号同順})$

3 定積分

$f(x)$ の不定積分の1つを $F(x)$ とするとき，$f(x)$ の a から b までの定積分は

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

4 定積分の公式

(1) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=0$

(2) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

(4) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx$

(5) $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx=k\int_a^b f(x)\,dx \quad (k\text{ は定数})$

(6) $\displaystyle\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx \quad (\text{複号同順})$

5 特殊な定積分の公式

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

一般には，$ax^2+bx+c=0$ の2つの実数解を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると

$$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx=-\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

6 定積分と面積(1)

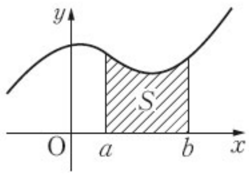
$a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq 0$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ とで囲まれる図形の面積を S とすると

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

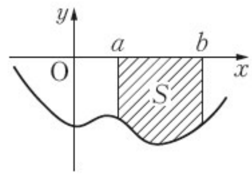
$f(x) \leqq 0$ のときは

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx$$

(i) $f(x) \geqq 0$ の場合



(ii) $f(x) \leqq 0$ の場合

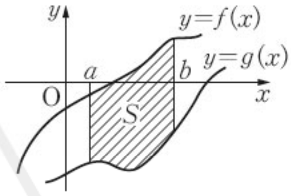


7 定積分と面積(2)

$a \leqq x \leqq b$ において，$f(x) \geqq g(x)$ のとき，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ および 2 直線 $x=a$，$x=b$ とで囲まれる図形の面積を S とすると

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$\left(\text{すなわち，} S=\int_a^b \{(\text{上側})-(\text{下側})\}\,dx\right)$

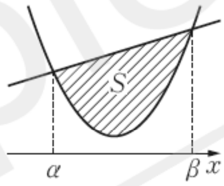


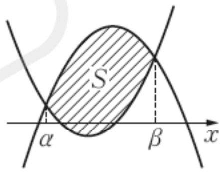
8 定積分と面積(3)

とくに，放物線と直線，放物線と放物線で囲まれた図形の面積 S を求めるには，定積分の公式**5**が使える。

$$S=-|k|\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}|k|(\beta-\alpha)^3$$

（k は x^2 の係数または x^2 の係数の差）



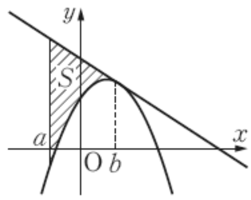


9 定積分と面積(4)

放物線とその接線によってつくられる図形の面積 S を求めるには，公式**2**(2)を用いることが多い。

すなわち，右の図で

$$S=\int_a^b (x-b)^2\,dx \quad \left(=-\frac{1}{3}(a-b)^3\right)$$



10 定積分で表された関数の決定

(1) 上端・下端が定数のとき

$\int_a^b f(t)\,dt$ は定数であるから，$\int_a^b f(t)\,dt=k$ とおいて，k を用いた式から k を求める。

(2) 上端が変数 x，下端が定数 a のとき

$\int_a^x f(t)\,dt$ は x の式であるから，次の(ア)と(イ)を用いて処理する。

(ア) $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

（被積分関数は t だけの式。
x が含まれているときは，積分変数 t に対して，x は定数として積分記号の外へ出す。）

(イ) $x=a$ とおき，$\int_a^a f(t)\,dt=0$ を用いる。

例題 1

次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_{-1}^{2}(x+2)(2x-3)\,dx$　　(2) $\int_{-1}^{2}|x(x-3)|\,dx$

ヒント

解答

(1) $\int_{-1}^{2}(x+2)(2x-3)\,dx=\int_{-1}^{2}(2x^2+x-6)\,dx$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x\right]_{-1}^{2}=-\frac{21}{2}$$

積の形は，展開してから積分する。

$\int_a^b x^n dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_a^b$

(2) $-1\leqq x\leqq 0$ のとき，$|x(x-3)|=x(x-3)$

$0\leqq x\leqq 2$ のとき，$|x(x-3)|=-x(x-3)$

であるから，(与式)$=\int_{-1}^{0}(x^2-3x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^2+3x)\,dx$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{11}{6}+\frac{10}{3}=\frac{31}{6}$$

積分区間を分けて絶対値記号を外してから計算する。

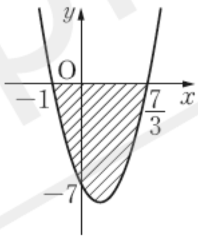
例題 2

放物線 $y=3x^2-4x-7$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答

$3x^2-4x-7=0$ とすると，$(x+1)(3x-7)=0$

$$x=-1,\ \frac{7}{3}$$



よって，$S=-\int_{-1}^{\frac{7}{3}}(3x^2-4x-7)\,dx$

$$=-3\int_{-1}^{\frac{7}{3}}\left(x-\frac{7}{3}\right)(x+1)\,dx$$

$$=\frac{3}{6}\left\{\frac{7}{3}-(-1)\right\}^3=\frac{500}{27}$$

$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}$

(x^2 の係数に注意)

例題 3

点 A$(2,\ -4)$ から放物線 $y=x^2-2x$ ……① に引いた 2 本の接線を ℓ，m とするとき，放物線と 2 直線 ℓ，m で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答

$y'=2x-2$ より，放物線①上の点 $(t,\ t^2-2t)$ における接線の方程式は

$y-(t^2-2t)=(2t-2)(x-t)$，　$y=2(t-1)x-t^2$

この直線が A$(2,\ -4)$ を通るから，$-4=4(t-1)-t^2$，$t^2-4t=0$

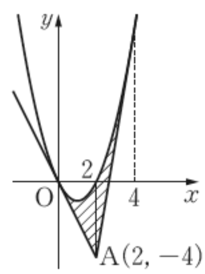
$t=0,\ 4$

ゆえに，$\ell : y=-2x$，$m : y=6x-16$ とおける。

よって，$S=\int_0^2\{(x^2-2x)-(-2x)\}\,dx+\int_2^4\{(x^2-2x)-(6x-16)\}\,dx$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}(x-4)^3\right]_2^4$$

$$=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$



$\int_2^4(x^2-8x+16)\,dx$

$=\int_2^4(x-4)^2dx$

$=\left[\frac{1}{3}(x-4)^3\right]_2^4$

例題4

$x \geqq 0$ とする。放物線 $C : y=x^2-a^2$ $(0<a<3)$ と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積を S_1，C と x 軸，直線 $x=3$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする。S_1+S_2 の最小値を求めよ。

ヒント

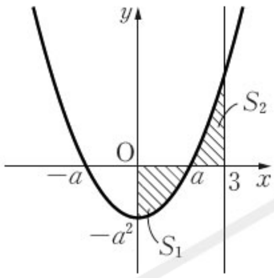
解答

放物線と x 軸との交点の x 座標は，$x^2-a^2=0$ より，$x=\pm a$

よって

$$S_1=-\int_0^a (x^2-a^2)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+a^2x\right]_0^a=-\frac{1}{3}a^3+a^3$$

$$=\frac{2}{3}a^3$$



$$S_2=\int_a^3 (x^2-a^2)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-a^2x\right]_a^3$$

$$=9-3a^2-\left(\frac{1}{3}a^3-a^3\right)=\frac{2}{3}a^3-3a^2+9$$

したがって，$S_1+S_2=\dfrac{4}{3}a^3-3a^2+9$

$y=\dfrac{4}{3}a^3-3a^2+9$ とおくと

$$y'=4a^2-6a=4a\left(a-\frac{3}{2}\right)$$

であるから，増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	3
y'		$-$	0	$+$	
y		↘	極小	↗	

⟷ 面積が3次関数で表されるときは，微分を用い，増減表から最大値・最小値を求める。

よって，$a=\dfrac{3}{2}$ のとき，S_1+S_2 は最小となり，最小値は，$\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{27}{8}-3\cdot\dfrac{9}{4}+9=\dfrac{27}{4}$

例題5

次の問いに答えよ。

(1) $f(x)=x^2-2\displaystyle\int_{-1}^{2} xf(t)\,dt+3$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=x^3-(a+1)x^2+3x+10$ を満たす関数 $f(x)$ と，そのときの a の値を求めよ。

解答

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(t)\,dt=k$ とおくと，$f(x)=x^2-2kx+3$

⟷ $2\displaystyle\int_{-1}^{2} xf(t)\,dt$
$=2x\displaystyle\int_{-1}^{2} f(t)\,dt$
$=2kx$

よって，$k=\displaystyle\int_{-1}^{2}(t^2-2kt+3)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-kt^2+3t\right]_{-1}^{2}=-3k+12$

ゆえに，$k=3$

したがって，$f(x)=x^2-6x+3$

(2) 与式の x に a を代入すると，$a^3-(a+1)a^2+3a+10=0$

$$a^2-3a-10=0$$

$$(a+2)(a-5)=0 \qquad a=-2,\ 5$$

⟷ 与式は x についての恒等式であるから，何を代入しても成り立ち，上端＝下端とすると，定積分値は0である。

$\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt=F(a)-F(a)=0$

与式の両辺を x で微分すると，$f(x)=3x^2-2(a+1)x+3$

⟷ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

よって，$a=-2$ のとき，$f(x)=3x^2+2x+3$

$a=5$ のとき，$f(x)=3x^2-12x+3$

基本問題演習

1 次の曲線と直線で囲まれた図形の面積Sを考える。

(1) $y=x^2+1$，x軸，$x=2$，$x=5$で囲まれた図形の面積は，$S=\boxed{\text{アイ}}$である。

(2) $1\leqq x\leqq 3$において，$y=3x^2-x-10$とx軸および$x=1$または$x=3$で囲まれてできる2つの部分の面積の和は，$S=\boxed{\text{ウエ}}$である。

(3) $y=x^2-1$，$y=x+1$で囲まれた部分の面積は，$S=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$である。

2 直線$\ell：y=ax+b$が放物線$C：y=-x^2+3x+4$上の点$(2,\ 6)$においてCと接しているとき，$x\geqq 2$の範囲で，Cとℓとx軸で囲まれた図形の面積Sは，$S=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$である。

3 放物線$C：y=x^2-2x+3$の接線のうち，点$(2,\ 2)$を通るものは，$\ell：y=\boxed{\text{ア}}$，$m：y=\boxed{\text{イ}}x-\boxed{\text{ウ}}$である。

Cとℓの接点の座標は$(\boxed{\text{エ}},\ \boxed{\text{オ}})$であり，$C$と$m$の接点の座標は$(\boxed{\text{カ}},\ \boxed{\text{キ}})$である。

2接線ℓ，mとCで囲まれる図形の面積は$\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$である。

4 2つの放物線$C_1：y=x^2-6x$，$C_2：y=-2x^2+2$の交点のx座標をα，β（$\alpha<\beta$）とおくと

$$\alpha=\frac{\boxed{\text{ア}}-\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}},\quad \beta=\frac{\boxed{\text{ア}}+\sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

であり，C_1とC_2で囲まれた図形の面積は$\dfrac{\boxed{\text{オカ}}\sqrt{\boxed{\text{キク}}}}{\boxed{\text{ケ}}}$である。

5 $y=x^2-x+1$ および直線 $y=2x+n$ とで囲まれる部分の面積が $\dfrac{1}{6}$ のとき，$n=$ $\boxed{\text{アイ}}$ である。

6 放物線 $C:y=-x^2+3x$ と直線 $\ell:y=mx$ を考える。

(1) C と x 軸とで囲まれる部分の面積 S は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2) 直線 ℓ と C で囲まれた部分の面積が(1)の面積 S の $\dfrac{1}{8}$ となるとき，

定数 m の値は $m=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

7 曲線 $C:y=|x^2-6|$ と直線 $\ell:y=x$ との交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とすると

$\alpha=\boxed{\text{ア}}$，　$\beta=\boxed{\text{イ}}$

であり，C と ℓ とで囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ウエオ}}}{\boxed{\text{カ}}}-\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ である。

8 放物線 $C_1:y=x^2-2x+1$ 上の動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と原点Oに対して，線分OPを $\mathrm{OQ}:\mathrm{OP}=a:1$（ただし，$0<a<1$）に内分する点Qの座標を $(X,\ Y)$ とすると

$X=\boxed{\text{ア}}\,x$，　$Y=\boxed{\text{イ}}\,y$

が成り立つから，点Qの表す曲線 C_2 の方程式は，$y=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}x^2-\boxed{\text{オ}}\,x+\boxed{\text{カ}}$ と表せる。

C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が $\dfrac{8\sqrt{a}}{9}$ のとき，a の値は $a=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

9 座標平面上で，放物線 $y=x^2+2x-3$ を C とする。

C 上の点 $(a,\ a^2+2a-3)$ における C の接線の方程式は

$$y=(\boxed{\text{アイ}}+\boxed{\text{ウ}})x-a^{\boxed{\text{エ}}}-\boxed{\text{オ}}$$

である。とくに，$a=0$ のときの接線の方程式は

$$y=\boxed{\text{カ}}x-\boxed{\text{キ}} \quad \cdots\cdots ㊟$$

となる。

実数 b，c は $b<0<c$ を満たすとする。放物線 C と接線㊟，および 2 直線 $x=b$，$x=c$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S は

$$S=\frac{1}{\boxed{\text{ク}}}\left(\boxed{\text{ケ}}^{\boxed{\text{コ}}}-\boxed{\text{サ}}^{\boxed{\text{コ}}}\right)$$

である。

10 座標平面上で，放物線 $y=x^2$ を C とする。

曲線 C 上の点 P の x 座標を a とする。点 P における C の接線 ℓ の方程式は

$$y=\boxed{\text{アイ}}x-a^{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。$a\neq 0$ のとき，直線 ℓ が x 軸と交わる点を Q とすると，Q の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$$

である。

$a>0$ のとき，曲線 C と直線 ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S=\frac{a^{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{クケ}}}$$

である。

$a<2$ のとき，曲線 C と直線 ℓ および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積を T とすると

$$T=-\frac{a^3}{\boxed{\text{コ}}}+\boxed{\text{サ}}a^2-\boxed{\text{シ}}a+\frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$$

である。

$a=0$ のときは $S=0$，$a=2$ のときは $T=0$ であるとして，$0\leqq a\leqq 2$ に対して $U=S+T$ とおく。a がこの範囲を動くとき，U は $a=\boxed{\text{ソ}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ をとり，$a=\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ をとる。

11 aを正の実数として，xの関数$f(x)$を

$$f(x)=x^3-3a^2x+a^3$$

とする。

関数$y=f(x)$は，$x=\boxed{\text{アイ}}$で極大値$\boxed{\text{ウ}}\,a^{\boxed{\text{エ}}}$をとり，$x=\boxed{\text{オ}}$で極小値$\boxed{\text{カ}}\,a^{\boxed{\text{キ}}}$をとる。

このとき，2点

$$\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}}\,a^{\boxed{\text{エ}}}\right),\quad \left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\,a^{\boxed{\text{キ}}}\right)$$

と原点を通る放物線

$$y=\boxed{\text{ク}}\,x^2-\boxed{\text{ケ}}\,a^{\boxed{\text{コ}}}x$$

をCとする。原点におけるCの接線ℓの方程式は

$$y=\boxed{\text{サシ}}\,a^{\boxed{\text{ス}}}x$$

である。また，原点を通りℓに垂直な直線mの方程式は

$$y=\frac{1}{\boxed{\text{セ}}\,a^{\boxed{\text{ソ}}}}x$$

である。

x軸に関して放物線Cと対称な放物線

$$y=-\boxed{\text{ク}}\,x^2+\boxed{\text{ケ}}\,a^{\boxed{\text{コ}}}x$$

をDとする。Dとℓで囲まれた図形の面積Sは

$$S=\frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}a^{\boxed{\text{テ}}}$$

である。

放物線Cと直線mの交点のx座標は，0と$\dfrac{4a^{\boxed{\text{ト}}}+1}{2a^{\boxed{\text{ナ}}}}$である。$C$と$m$で囲まれた図形の面積を$T$とする。

$S=T$となるのは$a^{\boxed{\text{テ}}}=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$のときであり，このとき，$S=\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$である。

12 Oを原点とする座標平面において，2点A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$をとる。次の2つの曲線C_1，C_2を考える。

$$C_1:y=mx^2+nx,\quad C_2:y=px^3+qx^2+rx$$

ここでC_1は2点O，Aを通り，C_1のOにおける接線の傾きは1である。また，C_2は3点O，A，Bを通り，C_2のOにおける接線の傾きはa $(a>0)$である。

(1) このとき$m=\boxed{\text{アイ}}$，$n=\boxed{\text{ウ}}$であり

$p=\boxed{\text{エオ}}$，$q=\boxed{\text{カ}}$，$r=\boxed{\text{キ}}$

である。

(2) C_1とC_2の交点のx座標は$x=0$，$\boxed{\text{ク}}$，$\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}-\boxed{\text{サ}}$である。したがって，$C_1$と$C_2$が$0<x<1$において交わるような$a$の値の範囲は$\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}<a<\boxed{\text{セ}}$である。

(3) aは$0<a<1$を満たすとする。C_1のAにおける接線をℓ_1とすると，ℓ_1の方程式は$y=\boxed{\text{ソ}}\,x+\boxed{\text{タ}}$である。$C_2$のOにおける接線を$\ell_2$とする。$x$軸と$\ell_1$，$\ell_2$で囲まれた部分の面積は$\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}\left(\boxed{\text{テ}}+1\right)}$である。また，$x$軸と$C_1$で囲まれた部分の面積は$\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}$である。$\ell_2$と$C_1$で囲まれた部分の面積を$S_1$とし，また，$\ell_1$，$\ell_2$および$C_1$の3つで囲まれた部分の面積を$S_2$とする。$S_1=S_2$となるのは$a=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$のときである。

13 $0<a<1$ とし，直線 ℓ : $y=x+a$ と直線 $x=1-a$ および x 軸によって囲まれた三角形を R とする。三角形 R の中で $y \leqq -x^2+a^2$ を満たす部分の面積を $S(a)$ で表す。$y=-x^2+a^2$ で表される放物線を C とする。

(1) 放物線 C と直線 ℓ が接するときの a の値を a_0 とすると，$a_0=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。$a \neq a_0$ のとき，C と ℓ の交点は

P$(\boxed{\text{ウエ}},\ \boxed{\text{オ}})$，Q$(\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{クケ}}-\boxed{\text{コ}})$ である。

(2) $0<a<a_0$ のとき，$S(a)=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}a^{\boxed{\text{ス}}}$ である。

$a_0 \leqq a<1$ のとき，C と x 軸で囲まれた図形の中で $a-1 \leqq x \leqq 1-a$ を満たす部分の面積は

$-\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a^3+\boxed{\text{タ}}a-\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ であるから，$S(a)=-\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}a^3+\boxed{\text{ナ}}a^2-\dfrac{1}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

14 a を正の実数とし，x の 2 次関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{8}x^2$$

$$g(x)=-x^2+3ax-2a^2$$

とする。また，放物線 $y=f(x)$ および $y=g(x)$ をそれぞれ C_1，C_2 とする。

(1) C_1 と C_2 の共有点を P とすると，点 P の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}a,\ \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}a^2\right)$

である。また，点 P における C_1 の接線の方程式は

$$y=\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}ax-\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}a^2$$

である。

(2) C_1 と x 軸および直線 $x=2$ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。また，C_2 と x 軸の交点の x 座標は $\boxed{\text{サ}}$，

$\boxed{\text{シス}}$ であり，C_2 と x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a^3$ である。

(3) $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，2 つの放物線 C_1，C_2 と 2 直線 $x=0$，$x=2$ で囲まれた図形を R とする。R の中で，$y \geqq 0$ を満たすすべての部分の面積 $S(a)$ は

$0<a \leqq \boxed{\text{タ}}$ のとき $S(a)=-\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}a^3+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$

$\boxed{\text{タ}}<a \leqq \boxed{\text{チ}}$ のとき

$$S(a)=-\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}a^3+\boxed{\text{ト}}a^2-\boxed{\text{ナ}}a+\boxed{\text{ニ}}$$

$\boxed{\text{チ}}<a$ のとき $S(a)=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$

である。したがって，a が $a>0$ の範囲を動くとき，$S(a)$ は $a=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ で最小値 $\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}$ をとる。

15 1次関数 $f(x)=ax+b$ の1つの不定積分が $(x^2-5x+2)f'(x)-\dfrac{1}{2}x^2+3x-1$ に等しいとき，

$a=\boxed{\text{ア}}$，$b=\boxed{\text{イウ}}$ であり，$\displaystyle\int_{-1}^{2}\{f(x)\}^2dx=\boxed{\text{エ}}$ である。

16 関数 $f(x)$ は，$x\leqq 3$ のとき $f(x)=x$，$x>3$ のとき $f(x)=-3x+12$

で与えられている。このとき，$x\geqq 0$ に対して，関数 $g(x)$ を，$g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ と定める。

$0\leqq x\leqq 3$ のとき，$g(x)=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x^{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，$x>3$ のとき

$g(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+\boxed{\text{エオ}}x-\boxed{\text{カキ}}$

である。

17 (1) $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt=ax^2-3x+1$ を満たす $f(x)$ は，$f(x)=\boxed{\text{ア}}x-\boxed{\text{イ}}$，$a$ の値は $a=\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) 関数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x(at^2+bt+c)\,dt+d$（ただし，$a>0$ とする）が $x=-1$ と $x=3$ で極値をとるとき，b，c を a で表すと，$b=\boxed{\text{エオ}}a$，$c=\boxed{\text{カキ}}a$ である。

さらに，極大値が $\dfrac{17}{3}$，極小値が -5 のとき，$a=\boxed{\text{ク}}$，$b=\boxed{\text{ケコ}}$，$c=\boxed{\text{サシ}}$，$d=\boxed{\text{ス}}$ である。

18 関数 $f(x)$，$g(x)$ は，次の等式を満たす。

$$f(x)=3x^2+18x-\int_{-2}^{2}g(t)\,dt,\qquad g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

このとき，$f(x)=3x^2+18x-\boxed{\text{アイ}}$，$g(x)=x^3+\boxed{\text{ウ}}x^2-\boxed{\text{エオ}}x$ となる。

よって，$g(x)$ は $x=\boxed{\text{カ}}$ で極小となり，極小値は $\boxed{\text{キクケ}}$ であり，$x=\boxed{\text{コサ}}$ で極大となる。

応用問題演習

STEP 1

1 a，b を実数とする。xy 平面上の直線 $y=ax+b$ が点$(2,\ 1)$を通るとき，$\int_{-1}^{1}(ax+b)^2dx$ の値が最小になるのは，$a=\boxed{\text{(ア)}}$，$b=\boxed{\text{(イ)}}$ のときである。〈明治大〉

2 曲線 $y=|x^2-x-2|$ と直線 $y=3x-1$ とで囲まれる図形の面積を求めよ。〈東北学院大〉

3 放物線 $C：y=(x-1)^2$ がある。放物線C上の点A$(3,\ 4)$を通り，傾き a の直線 ℓ が y 軸と交わる点をPとする。ただし，$a<1$ とする。このとき，次の問いに答えよ。〈龍谷大〉

(1) 点Pの座標を求めよ。

(2) 放物線Cと直線 ℓ とで囲まれる図形の第1象限内にある部分の面積が10であるとき，a の値を求めよ。

4 関数 $f(x)=x^3-6x$ について，2つの曲線 $y=f(x)$，$y=f(x+1)-1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。〈日本女子大〉

5 2つの放物線 $C_1：y=x^2-2x-3$，$C_2：y=-2x^2+x+3$ がある。次の問いに答えよ。〈法政大〉

(1) C_1とC_2の交点の座標を求めよ。

(2) この2つの交点を通り，C_1とC_2で囲まれる領域の面積を二等分する放物線の方程式を求めよ。

6 放物線 $C : y=-x^2+6$ 上の 2 点 A，B の x 座標をそれぞれ $x=-1$，$x=3$ とする。直線 AB と平行な直線 ℓ が放物線 C に接するとき，次の問いに答えよ。 〈福岡大〉

(1) ℓ の方程式を求めよ。

(2) 放物線 C と直線 $x=-1$ および接線 ℓ とで囲まれた部分の面積を求めよ。

7 曲線 $C : y=x^2-4|x-1|+4$ に，相異なる 2 点で接する直線 ℓ の方程式を $y=ax+b$ とする。このとき，次の問いに答えよ。 〈学習院大〉

(1) a，b を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ とで囲まれた部分の面積を求めよ。

8 点 $(1,\ 2)$ を通る傾き a の直線と，放物線 $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする。このとき，その最小値を求めよ。 〈慶應義塾大〉

9 放物線 $C : y=x^2$ 上に点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる。ただし，$b<0<a$ とする。次の問いに答えよ。 〈高知大〉

(1) 放物線 C の点 A における接線と点 B における接線の交点の座標を求めよ。

(2) 放物線 C と直線 AB で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(3) 三角形 OAB の面積を T とするとき，$\dfrac{S}{T}$ がとり得る値の最小値を求めよ。ただし，O は原点 $(0,\ 0)$ である。

10 $a>0$ とする。次の問いに答えよ。 〈東京女子大〉

(1) 関数 $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{x}(t^2+at)\,dt$ の極大値 $M(a)$ を a の式で表せ。

(2) a が $a>0$ の範囲で動くときの $M(a)$ の最小値を求めよ。

11 t が区間 $\left[-\dfrac{1}{2},\ 2\right]$ を動くとき，$F(t)=\displaystyle\int_{0}^{1}x|x-t|\,dx$ の最大値と最小値を求めよ。 〈山口大〉

12 放物線$y=\frac{1}{2}x^2$について，次の問いに答えよ。 〈県立広島大〉

(1) 点$\mathrm{P}\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$における接線$\ell_1$の方程式を求めよ。

(2) 点Pを通り直線ℓ_1に直交する直線をℓ_2とする。直線ℓ_2とx軸との交点Aの座標を求めよ。

(3) 点Aを中心とし，直線ℓ_1に接する円の方程式を求めよ。

(4) (3)の円とx軸との交点のうち原点に近い方の点Bの座標を求めよ。

(5) 放物線，円弧BPおよびx軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

13 $y=x^3$ ……① のグラフの第3象限にある部分に点$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^3)$をとり，Pで①のグラフに接線をひき，①のグラフと再び交わる点を$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^3)$とする。同様に$\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^3)$でひいた接線と①のグラフが再び交わる点を$\mathrm{R}(\gamma,\ \gamma^3)$とし，①のグラフとPあるいはQでひいた接線の囲む図形の面積をそれぞれS_1，S_2とする。

このとき，次の問いに答えよ。 〈広島修道大〉

(1) S_1をαの式で表せ。

(2) S_2はS_1の何倍であるかを求めよ。

14 関数$f(x)$を，$f(x)=-2x^2+2\int_1^x f'(t)\,dt$を満たすように定めるとき，$f(x)=$ $\boxed{}$ である。 〈名城大〉

15 2次の係数が1である2次式$f(x)$に対して，

xについての恒等式$\int_x^{x+1} f(t)\,dt=\boxed{(ア)}\,f(x+\boxed{(イ)})+\boxed{(ウ)}$

が成り立つ。 〈関西学院大〉

16 $f(a)=\int_0^1 |x^2-a^2|\,dx$とする。次の問いに答えよ。 〈福岡大〉

(1) $a\geqq 1$のとき，$f(a)$を求めよ。

(2) $0<a\leqq 1$のとき，$f(a)=\frac{1}{3}$となるaの値を求めよ。

17 等式 $f(x)=x^2-\int_{-2}^{1}2xf(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ について，次の問いに答えよ。 〈大分大〉

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) $\int_{-2}^{1}|f(x)|\,dx$ を求めよ。

18 $f(x)=\int_{-1}^{1}(x-t)f(t)\,dt+1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。 〈小樽商科大〉

STEP 2

1 放物線 $C：y=-x^2+2x+1$ と x 軸との共有点を $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(b,\ 0)$ とし，放物線 C と直線 $y=mx$ との共有点を $\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ m\beta)$，原点を O とする。ただし，$a<b$，$m\neq 0$，$\alpha<\beta$ とする。

線分 OP，OA と C で囲まれた図形の面積と，線分 OQ，OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき，m の値を求めよ。 〈大阪大〉

2 関数 $f(x)$ は，$x<0$ のとき 0，$0\leqq x\leqq 1$ のとき x，$x>1$ のとき $-x+2$ の値をとるものとする。このとき，次の問いに答えよ。 〈中央大〉

(1) $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2) $g(x)=\int_{x-1}^{x}f(t)\,dt$ を，次の 4 つの場合についてそれぞれ求めよ。

(i) $x\leqq 0$　(ii) $0<x\leqq 1$　(iii) $1<x\leqq 2$　(iv) $2<x$

(3) $y=g(x)$ のグラフと x 軸で囲む部分の面積を求めよ。

3 放物線 $C：y=ax^2$ $(a>0)$ を考える。放物線 C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ ap^2)$ $(p\neq 0)$ における C の接線と直交し，P を通る直線を ℓ とし，直線 ℓ と放物線 C とで囲まれる図形の面積を $S(p)$ とする。次の問いに答えよ。 〈名古屋大〉

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 点 P を $p>0$ の範囲で動かす。$S(p)$ が最小となるときの，直線 ℓ の傾き m と $S(p)$ を求めよ。

4 区間 $0\leqq x\leqq 2$ で，関数 $f_n(x)$ が次のように定義されている。

$$f_0(x)=\begin{cases}1 & (0\leqq x\leqq 1)\\ -1 & (1<x\leqq 2)\end{cases}$$

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt \quad (n=1,\ 2,\ 3)$$

このとき，次の問いに答えよ。 〈慶應義塾大〉

(1) $f_3(1)$，$f_3(2)$ の値を求めよ。

(2) $\int_1^2 f_2(x)\,dx$ の値を求めよ。

(3) $\int_0^2 f_0(x)f_1(x)\,dx$ の値を求めよ。