第3講　図形と計量

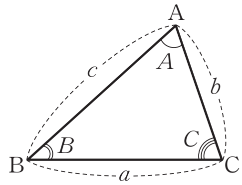
必　須　事　項

第 3 講では，△ABC において

　∠A，∠B，∠C の大きさをそれぞれ，A，B，C

　辺BC，辺CA，辺AB の長さをそれぞれ，a，b，c

と断りなく表すことがある。

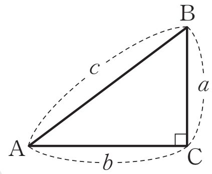


1　三角比の定義

(1)　鋭角の三角比

右の図で，$C=90^\circ$ のとき

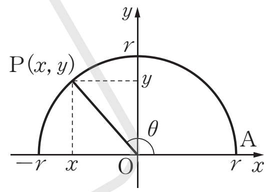
$$\sin A=\frac{a}{c},\ \cos A=\frac{b}{c},\ \tan A=\frac{a}{b}$$



(2)　鈍角の三角比

右の図で，半径 r の半円周上の点 P の座標を$(x,\ y)$，∠AOP$=\theta$ とすると

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq 0)$$



特に，$r=1$ のとき，$\sin\theta=y$，$\cos\theta=x$，$\tan\theta=\dfrac{y}{x}\ (x\neq 0)$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$における三角比の値は，次の表のようになる。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

2　三角比の性質

(1)　三角比の相互関係

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

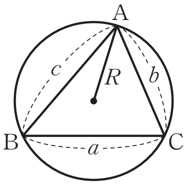
(2)　$90^\circ-\theta$，$180^\circ-\theta$ の三角比

$$\begin{cases}\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta\\ \cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta\\ \tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta\\ \cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta\\ \tan(180^\circ-\theta)=-\tan\theta\end{cases}$$

3 三角形と三角比

(1) 正弦定理



△ABCにおいて

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

(R は△ABCの外接円の半径)

(2) 余弦定理

△ABCにおいて，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

この式を変形すると，$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

余弦定理より，次のことが成り立つ。

$A<90^\circ \iff a^2<b^2+c^2$

$A=90^\circ \iff a^2=b^2+c^2$

$A>90^\circ \iff a^2>b^2+c^2$

(3) 三角形の面積

△ABCの面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

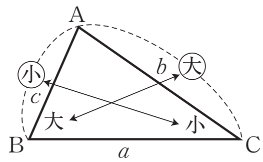
ここで，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とすると

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

が成り立つ。(ヘロンの公式)

4 三角形・四角形の性質

(1) 三角形の辺と角の大小関係



右の図のように，三角形の辺の大小関係とその対角の大小関係は一致する。

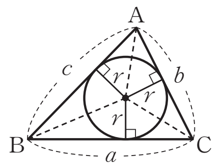
$B>C \iff b>c$

(2) 三角形の成立条件

実数 a，b，c を 3 辺の長さとする三角形が存在するための条件は

$|a-b|<c<a+b$

(3) 三角形の内接円の半径

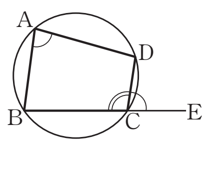


△ABCの面積をS，内接円の半径を r とすると，

$S=\dfrac{1}{2}(a+b+c)r$ が成り立つから

$$r=\frac{2S}{a+b+c}$$

(4) 円に内接する四角形



(i) 円に内接する四角形の向かい合う内角の和は180°である。

(ii) 内角は，それに向かい合う角の外角に等しい。

すなわち，右の図で，∠DAB＋∠BCD＝180°，∠DAB＝∠DCE

逆に，(i)，(ii)のどちらかが成り立つ四角形は，円に内接する。

例題 1 ［三角比の計算］➡ **2**

$(\sin 152^\circ + \cos 152^\circ)^2 + (\cos 28^\circ + \cos 62^\circ)^2$ の値を求めよ。

解答

$\sin 152^\circ = \sin(180^\circ - 28^\circ) = \sin 28^\circ$

$\cos 152^\circ = \cos(180^\circ - 28^\circ) = -\cos 28^\circ$

$\cos 62^\circ = \cos(90^\circ - 28^\circ) = \sin 28^\circ$

であるから

$(\sin 152^\circ + \cos 152^\circ)^2 + (\cos 28^\circ + \cos 62^\circ)^2$

$= (\sin 28^\circ - \cos 28^\circ)^2 + (\cos 28^\circ + \sin 28^\circ)^2$

$= \sin^2 28^\circ - 2\sin 28^\circ \cos 28^\circ + \cos^2 28^\circ + \cos^2 28^\circ + 2\cos 28^\circ \sin 28^\circ + \sin^2 28^\circ$

$= 2(\sin^2 28^\circ + \cos^2 28^\circ) = 2$

類題 1　$\sin^2 22.5^\circ + 3\sin^2 67.5^\circ + \sin^2 112.5^\circ + 3\sin^2 157.5^\circ$ の値を求めよ。

例題 2 ［正弦定理と余弦定理］➡ **3**

次の問いに答えよ。

(1)　△ABCにおいて，$a=10$，$A=45^\circ$，$B=105^\circ$ のとき，c の値を求めよ。
また，△ABCの外接円の半径 R を求めよ。

(2)　△ABCにおいて，$a=\sqrt{7}$，$c=4$，$A=30^\circ$のとき，b の値を求めよ。

(3)　△ABCにおいて，$a=6$，$b=5$，$c=3$ であるとき，この三角形は鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形のいずれかを答えよ。

(4)　△ABCにおいて，AB$=4$，AC$=3$，$A=120^\circ$ のとき，△ABCの面積 S を求めよ。

解答

(1)　$C = 180^\circ - (A+B) = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$ であるから，正弦定理より

$$\frac{10}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 30^\circ} = 2R$$

よって，$c = \dfrac{10}{\sin 45^\circ} \times \sin 30^\circ = 10 \div \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{2} = 5\sqrt{2}$

$$R = \frac{10}{\sin 45^\circ} \times \frac{1}{2} = 5 \div \frac{1}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

(2)　余弦定理より，$(\sqrt{7})^2 = b^2 + 4^2 - 2 \cdot b \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ$

よって，$b^2 - 4\sqrt{3}\,b + 9 = 0$　　$(b-\sqrt{3})(b-3\sqrt{3}) = 0$

$b = \sqrt{3}$，$3\sqrt{3}$

(3)　$a^2 = 6^2 = 36$，$b^2 + c^2 = 5^2 + 3^2 = 34$ より，$a^2 > b^2 + c^2$

よって，$A > 90^\circ$

したがって，△ABCは鈍角三角形である。

(4)　$S = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ = 3\sqrt{3}$

類題 2　次の問いに答えよ。

(1)　△ABCにおいて，$b=2\sqrt{2}$，$c=2$，$B=45^\circ$ のとき，C を求めよ。
また，△ABCの外接円の半径 R を求めよ。

(2)　△ABCにおいて，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}-1$ のとき，A を求めよ。

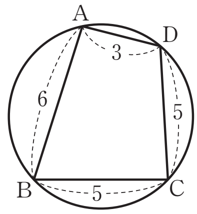
(3)　$a=2$，$b=4$ の△ABCがある。△ABCが直角三角形のとき，c の値を求めよ。

(4)　△ABCにおいて，$a=2$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$A=30^\circ$，$C=105^\circ$ のとき，△ABCの面積 S を求めよ。

例題3 ［余弦定理の利用］➡3，4

四角形ABCDが円に内接し，AB＝6，BC＝5，CD＝5，DA＝3のとき，ACの長さを求めよ。

解答



$\triangle$ABCにおいて，余弦定理より

$AC^2=6^2+5^2-2\cdot6\cdot5\cdot\cos B=61-60\cos B$ ……①

$\triangle$ACDにおいて，余弦定理より

$AC^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos D=34-30\cos D$ ……②

四角形ABCDは円に内接するから

$\cos D=\cos(180^\circ-B)=-\cos B$ ……③

したがって，①，②，③より

$61-60\cos B=34+30\cos B$

よって，$\cos B=\dfrac{3}{10}$

①より，$AC^2=61-60\cdot\dfrac{3}{10}=43$

$AC>0$ より，$AC=\sqrt{43}$

類題3 四角形ABCDが円に内接し，$AB=2\sqrt{2}$，$BC=6$，$CD=4\sqrt{2}$，$\angle BCD=45^\circ$ のとき，次の長さを求めよ。

(1) BD　　(2) AD

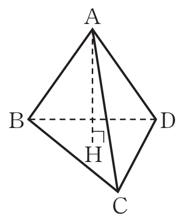
例題4 ［空間図形と三角比］➡3

右の図のような1辺の長さが4の正四面体ABCDにおいて，頂点Aから平面BCDに垂線AHを引く。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 辺CDの中点をMとするとき，$\cos\angle AMB$ を求めよ。

(2) $\triangle$ABMの面積 S を求めよ。

(3) 正四面体ABCDの体積 V を求めよ。



解答

(1) $BM=AM=2\sqrt{3}$ であるから，$\triangle$ABMにおいて，余弦定理より

$$\cos\angle AMB=\frac{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-4^2}{2\cdot2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

(2) $\sin\angle AMB>0$ であるから，$\sin\angle AMB=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって，$S=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$

(3) $CD\perp AM$，$CD\perp BM$ より $CD\perp$ 平面ABMであるから

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot CM+\frac{1}{3}\cdot S\cdot DM=\frac{1}{3}\cdot S\cdot CD=\frac{1}{3}\cdot4\sqrt{2}\cdot4=\frac{16\sqrt{2}}{3}$$

類題4 AB＝AC＝AD＝6，BC＝5，CD＝8，DB＝7の四面体ABCDにおいて，頂点Aから平面BCDに垂線AHを引く。このとき，次の問いに答えよ。

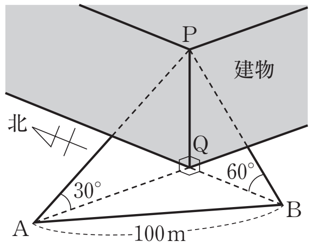
(1) $\triangle$BCDの面積 S を求めよ。

(2) BHの長さを求めよ。

(3) 四面体ABCDの体積 V を求めよ。

標 準 問 題

1 右の図のように，建物の真西の地点Aから地点Qにある建物の頂点Pを見上げたときの仰角は30°，真南の地点BからPを見上げたときの仰角は60°であった。また，2点A，B間の距離は100mであった。このとき，建物の高さPQを求めよ。ただし，目の高さは考えないものとする。



2 2直線 $x+\sqrt{3}\,y-2=0$ ……①，$x+y+2=0$ ……② がある。

(1) 直線①と x 軸の正の向きのなす角を求めよ。

(2) 2直線①，②のなす角を求めよ。

3 次の問いに答えよ。

(1) $0°<\theta<180°$，$\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=\sqrt{2}$ であるとき，$\tan\theta$，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) $0°\leqq\theta\leqq180°$で，$\tan\theta=-4$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

4 次の等式を証明せよ。

(1) $\tan\theta+\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}$

(2) $(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta=1-\tan^2\theta$

5 $0°<\theta<180°$とする。$\sin\theta+\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$ の値を求めよ。

6 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $(0°\leqq\theta\leqq90°)$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}$ の値を求めよ。

7 $0^\circ<\theta<180^\circ$ とする。$\cos^2\theta+4\sin\theta-4=0$ を満たす θ の値を求めよ。

8 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。x の 2 次方程式 $2x^2+(4\cos\theta)x+3\sin\theta=0$ ……① がただ 1 つの実数解をもつとき，θ の値と，そのときの 2 次方程式の解を求めよ。

9 $\triangle$ABC において，$b=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，$c=2\sqrt{2}$，$C=45^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

10 $\triangle$ABC において，$a:b:c=2\sqrt{2}:2:(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ のとき，最大の角の大きさを求めよ。

11 $\triangle$ABC において，AB$=2$，AC$=3$，$\angle$BAC$=120^\circ$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) $\triangle$ABC の面積を求めよ。

(2) $\angle$BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，AD の長さを求めよ。

12 台形ABCDにおいて，AD∥BC，BC＝3，CD＝5，AD＝10，∠BCD＝120°，対角線BDとACのなす角を θ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) BDの長さを求めよ。

(2) $\sin\theta$ の値を求めよ。

13 四角形ABCDにおいて，AB＝$\sqrt{3}-1$，AC＝2，DA＝$2\sqrt{2}$，∠CDA＝45°，∠BAC＝30° であるとき，次のものを求めよ。

(1) 線分BCの長さ

(2) ∠ABCの大きさ

(3) 線分CDの長さ

(4) 四角形ABCDの面積 S

14 △ABCにおいて，次の等式が成り立つことを示せ。

(1) $c=a\cos B+b\cos A$

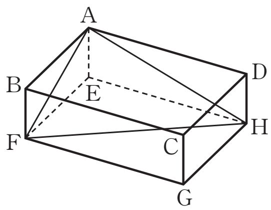
(2) $(b-c\cos A)\sin B=(a-c\cos B)\sin A$

15 △ABCにおいて，$2\sin A\cos B=\sin C$ が成り立つとき，△ABCはどのような三角形か答えよ。

16 右の図のような直方体ABCD−EFGHにおいて，AE＝$\sqrt{10}$，AF＝8，AH＝10とする。このとき，次の問いに答えよ。

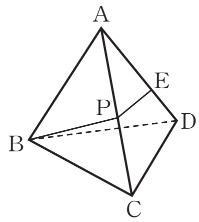
(1) △AFHの面積を求めよ。

(2) 点Eから△AFHに垂線を引き，△AFHとの交点をＩとする。線分EIの長さを求めよ。



17 右の図のような１辺の長さが１の正四面体ABCDがある。辺ADを２：１に内分する点をEとし，辺AC上に動点Pをとり，BとP，PとEを結ぶ。

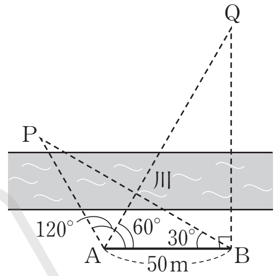
２つの線分の長さの和 BP＋PE の最小値を求めよ。



18 右の図のように，川のこちら側に２地点A，B，向こう側に２地点P，Qがある。

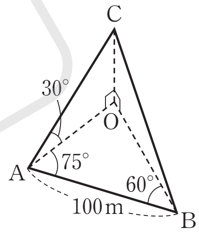
次の長さを求めよ。

(1) AP　　(2) AQ　　(3) PQ



19 ある塔の高さを求めるために，塔が立つ地点Oと同じ標高にある２つの地点A，Bを考える。２地点A，B間の距離は100mであり，∠OAB＝75°，∠OBA＝60°，Aから塔の先端Cを見上げたときの仰角が30°であった。

このとき，塔の高さOCを求めよ。



20 ３辺の長さがそれぞれ２，３，４であるような三角形がある。この三角形の面積をS，この三角形に内接する円の半径をrとするとき，次の問いに答えよ。

(1) Sを求めよ。

(2) rを求めよ。

21 円に内接する四角形ABCDにおいて，AB＝2，BC＝$2\sqrt{2}$，CD＝4，∠ABC＝135° のとき，次のものを求めよ。

(1) ADの長さ　　(2) 四角形ABCDの外接円の半径R

(3) 四角形ABCDの面積S

共通テスト型演習

特に指示がない場合，各空欄のア，イ，ウ，…には符号(－)や数字(0～9)のうち当てはまるものを答えよ。選択肢が与えられている場合は，当てはまる選択肢の番号を答えよ。

1 △ABCにおいて，AB＝6，BC＝$2\sqrt{7}$，CA＝4とする。∠Aの二等分線と辺BCとの交点をD，∠Aの二等分線と△ABCの外接円との交点のうち点Aと異なる点をEとする。

(1) cos∠BAC＝$\boxed{ア}$であるから，∠BAC＝$\boxed{イ}$である。
これより，∠EBC＝$\boxed{ウ}$，∠ECB＝$\boxed{エ}$となるから，△BCEは$\boxed{オ}$である。
よって，CE＝$\dfrac{\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キク}}}{\boxed{ケ}}$であることがわかる。

$\boxed{ア}$の解答群

⓪ $-\dfrac{1}{2}$	① 0	② $\dfrac{1}{2}$	③ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	④ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{イ}$～$\boxed{エ}$の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 30°	① 45°	② 60°	③ 90°	④ 120°

$\boxed{オ}$については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから1つ選べ。

⓪ 二等辺三角形	① 直角三角形	② 直角二等辺三角形	③ 正三角形

(2) 辺ACの延長と，2点B，Eを通る直線の交点をPとすると，∠APB＝$\boxed{コ}$－∠ABCであるから，
sin∠APB＝$\dfrac{\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$である。
これと，∠CEP＝$\boxed{セ}$であることから，CP＝$\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$である。

$\boxed{コ}$，$\boxed{セ}$の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 30°	① 45°	② 60°	③ 90°	④ 120°

2 △ABCにおいて，sin∠CAB：sin∠ABC：sin∠BCA＝7：5：3である。

(1) BC：CA：AB＝$\boxed{ア}$であるから，∠CAB，∠ABC，∠BCAのうち最大のものは$\boxed{イ}$であり，その大きさは$\boxed{ウ}$である。

$\boxed{ア}$の解答群

⓪ 7：5：3	① 3：5：7	② 15：21：35

$\boxed{イ}$の解答群

⓪ ∠CAB	① ∠ABC	② ∠BCA

$\boxed{ウ}$の解答群

⓪ 90°	① 120°	② 135°	③ 150°

(2) △ABCの面積が$60\sqrt{3}$であるとき，AB＝$\boxed{エオ}$，BC＝$\boxed{カキ}$，CA＝$\boxed{クケ}$である。
このとき，△ABCの内接円の半径は$\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}$より，内接円の面積は$\boxed{シス}\pi$である。

3 円に内接する四角形ABCDにおいて，AB＝3，BC＝7，CD＝7，DA＝5である。この四角形の対角線AC，BDの交点をEとして，$\sin\angle\text{AEB}$の値を求める。

(1) △ABDにおいて余弦定理を用いることにより，$\text{BD}^2=34-\boxed{\text{アイ}}\cos\angle\text{BAD}$と表される。

また，△BCDにおいて余弦定理を用いることにより，$\text{BD}^2=98+\boxed{\text{ウエ}}\cos\angle\text{BAD}$と表されるから，$\angle\text{BAD}=\boxed{\text{オ}}$であり，$\text{BD}=\boxed{\text{カ}}$である。

さらに，$\angle\text{CAD}=\boxed{\text{キ}}$であるから，$\text{AC}=\boxed{\text{ク}}$である。

$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{キ}}$の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 30°	① 45°	② 60°	③ 90°	④ 120°

(2) 四角形ABCDの面積は，$\boxed{\text{ケコ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$である。

(3) 四角形ABCDの面積を，△ABCと△ADCの和とみると，この面積は，$\boxed{\text{シス}}\sin\angle\text{AEB}$と表すことができる。

よって，$\sin\angle\text{AEB}=\dfrac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$である。

4 △ABCにおいて，BC＝2であり，2辺AB，CAの間には，AB＋CA＝4の関係があるとする。

(1) $\angle\text{ABC}=120^\circ$のとき，$\text{AB}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$であり，△ABCの外接円の半径は$\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カキ}}}$である。

(2) $\angle\text{ABC}=\theta$，$\text{AB}=x$とすると，$\cos\theta=\dfrac{\boxed{\text{ク}}x-\boxed{\text{ケ}}}{x}$，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{-3x^2+\boxed{\text{コサ}}x-\boxed{\text{シ}}}}{x}$と表される。

ただし，$-3x^2+\boxed{\text{コサ}}x-\boxed{\text{シ}}>0$より，$x$の取り得る値の範囲は$\boxed{\text{ス}}<x<\boxed{\text{セ}}$である。

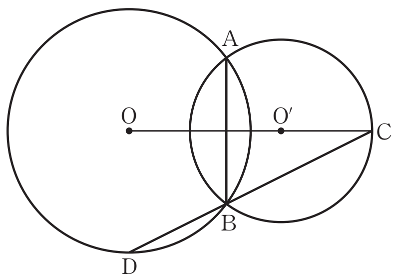
(3) $\text{AB}=x$とすると，△ABCの面積は$\sqrt{-3x^2+\boxed{\text{コサ}}x-\boxed{\text{シ}}}$と表されるから，$x=\boxed{\text{ソ}}$のとき最大となり，最大値は$\sqrt{\boxed{\text{タ}}}$である。このとき，$\boxed{\text{チ}}$である。

$\boxed{\text{チ}}$の解答群

⓪ AB＞CA	① AB＝CA	② AB＜CA

5 右の図のように交わる2円O，O′があり，(円Oの半径)＞(円O′の半径)である。

この図においてA，Bは2円の交点，Cは線分OO′のO′の側への延長と円O′の交点，Dは直線CBと円Oの交点のうちBとは異なる点である。



さらに，$\sin\angle\text{ABC}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，AB＝3，$\text{BD}=\sqrt{5}$とする。

(1) $\cos\angle\text{ABD}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$\text{AD}=\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$である。

(2) 円Oの半径OAは$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$である。また，円O′の半径O′Aは$\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$である。

(3) 2円の中心間の距離は，$\text{OO}'=\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$となる。

6 1辺の長さが4の正四面体OABCがある。点Pは線分OA上の点であり，点Q，Rはそれぞれ辺OB，OCの中点である。OPの長さを p とする。

(1) △PQRにおいて，$PQ=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$，$QR=\boxed{\text{イ}}$，$RP=\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$ であるから，

△PQRにおいて余弦定理より，$\cos\angle QPR=1-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ と表される。

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{オ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 1	① 2	② 3	③ p	④ $2p$
⑤ p^2-2p+2	⑥ p^2-2p+4	⑦ p^2+4p+2	⑧ p^2-4p+2	

(2) ∠QPRの大きさが最大となるときの△PQRの面積を考える。

$0\leqq p\leqq 4$ より，$\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ の取り得る値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\leqq\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\leqq\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ であるから，

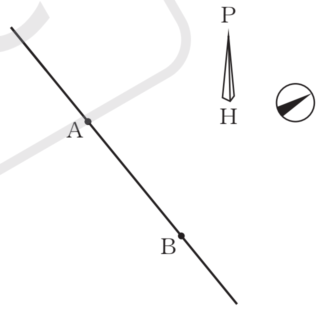
$\cos\angle QPR$ の取り得る値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\leqq\cos\angle QPR\leqq\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

よって，∠QPRの大きさが最大になるのは，$p=\boxed{\text{セ}}$ のときである。

このとき，$\sin\angle QPR=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チ}}}$ であるから，△PQRの面積は $\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

7 以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて136ページの三角比の表を用いてもよい。

右の図のような東西に一直線上に伸びる道路と，その道路の北に鉄塔があり，鉄塔の先端をP，鉄塔の先端の真下の地点をHとする。ただし，道路と点Hは同一平面上にあるものとする。はじめに，道路上の地点Aで鉄塔の先端Pを見上げた仰角は30°であり，地点Aから道路上を東に100m歩いた地点BでPを見上げた仰角は45°であった。ただし，目の高さは1.5mとする。また，地点Bにおいて∠ABHの大きさを測ったところ，∠ABH＝60°であった。



(1) AHの長さは $\boxed{\text{ア}}$ m，BHの長さは $\boxed{\text{イ}}$ mであり，鉄塔の高さは $\boxed{\text{ウエ}}.\boxed{\text{オ}}$ mである。

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 50	① $50\sqrt{2}$	② $50\sqrt{3}$
③ 100	④ $100\sqrt{2}$	⑤ $100\sqrt{3}$

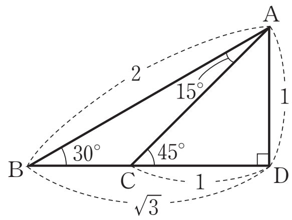
(2) 道路上で，AB⊥CHとなる地点Cを定めると，$\boxed{\text{カ}}$。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ 地点A，Bはともに地点Cよりも西側にある
① 地点Aは地点Cよりも西側，地点BはCよりも東側にある
② 地点A，Bはともに地点Cよりも東側にある

(3) この道路上で，Pを見上げた仰角の最大値は，$\boxed{\text{キク}}$°である。ただし，$\sqrt{3}=1.73$ として，小数第1位を切り捨てて答えよ。

8 (1) 太郎さんと花子さんは，$\sin 15^\circ$ の値を，右のような図を用いて，次の３つの方針で求めている。



方針１

△ABCにおいて，辺の長さを求め，正弦定理を用いる。

$BC=\sqrt{3}-1$，$AC=\sqrt{2}$ であるから，正弦定理より，$\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sin 15^\circ}=\boxed{\text{ア}}$

となる。

これを解くと，$\sin 15^\circ=\boxed{\text{イ}}$ である。

方針２

△ABCの面積を２通りで表し，それらが等しいことを利用する。

△ABCの面積を S とすると，$S=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot AD=\boxed{\text{ウ}}$ である。

また，S を $\sin 15^\circ$ を用いた式で表すと，$S=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\sin 15^\circ=\boxed{\text{エ}}$ となる。

よって，$\boxed{\text{ウ}}=\boxed{\text{エ}}$ であることから，$\sin 15^\circ=\boxed{\text{イ}}$ であることがわかる。

方針３

点CからABに垂線CHを引き，△ACHの辺の長さを求める。

$BC=\sqrt{3}-1$，$\angle CBH=30^\circ$，$\angle CHB=90^\circ$ であるから，$CH=\boxed{\text{オ}}$

これと，$AC=\sqrt{2}$ より，$\sin 15^\circ=\boxed{\text{イ}}$ である。

$\boxed{\text{ア}}$ の解答群

⓪ $\sin 30^\circ$	① $\dfrac{2}{\sin 30^\circ}$	② $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$	③ $\dfrac{\sin 30^\circ}{\sqrt{2}}$

$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$	① $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$	② $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	③ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{\sin 15^\circ}{\sqrt{2}}$	① $\dfrac{\sin 15^\circ}{2}$	② $\sqrt{2}\sin 15^\circ$	③ $2\sin 15^\circ$

(2) ２人は，30°，45°の整数倍以外の角度についても，三角比の値を求められるかどうかを考えている。

太郎：(1)の△ABCで余弦定理を用いると，$\cos 15^\circ$ の値を求めることができるね。
花子：そうだね。
太郎：それに，$\sin 15^\circ$，$\cos 15^\circ$ の値を利用すると，他の角度についても三角比の値を求めることができそうだね。

$\cos 15^\circ$ の値を求めると，$\boxed{\text{カ}}$ となる。

よって，$\sin 75^\circ=\boxed{\text{キ}}$，$\sin 105^\circ=\boxed{\text{ク}}$，$\sin 165^\circ=\boxed{\text{ケ}}$ であることがわかる。

$\boxed{\text{カ}}$ ～ $\boxed{\text{ケ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$	① $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$	② $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	③ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

入 試 実 戦 演 習

STEP 1

1 次の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{エ}$ にあてはまる数を答えよ。

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，$y=2\sin^2\theta+3\cos\theta+\dfrac{1}{8}$ の最大値は $\boxed{ア}$ で，そのとき，$\tan\theta=\boxed{イ}$ である。

また，最小値は $\boxed{ウ}$ で，そのとき，$\tan\theta=\boxed{エ}$ である。

2 xy 平面上の放物線 $y=x^2-2(1+\cos\theta)x+4\sin^4\theta-\sin^2\theta+2$ について，次の問いに答えよ。

(1) この放物線の頂点Pの座標を θ を用いて表せ。

(2) (1)の頂点Pが直線 $y=(1-\cos\theta)x-2\cos\theta$ 上にあるとき，θ の値および頂点Pの座標を求めよ。ただし，$0°<\theta<90°$ とする。

3 xy 平面において，直線 $y=1$ 上を動く点 $\mathrm{P}(t,\ 1)$ と，x 軸上の 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$ のつくる角 $\angle\mathrm{OPA}$ を θ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $X=\dfrac{\mathrm{PO}^2+\mathrm{PA}^2-\mathrm{OA}^2}{2}$ とおく。X を t で表し，X が最小となる t の値と最小値を求めよ。

(2) $\cos^2\theta$ を X で表せ。

(3) $\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ となる t の値を求めよ。

4 円に内接する四角形ABCDの各辺の長さを $\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=6$，$\mathrm{CD}=6$，$\mathrm{DA}=4$ とし，対角線AC，BD の交点をEとする。このとき，線分AE，BEの長さの比 $\dfrac{\mathrm{AE}}{\mathrm{BE}}$ の値とAEの長さを求めよ。

5 △ABCにおいて，$a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とする。$a^2\cos A\sin B=b^2\cos B\sin A$ が成り立つとき，△ABCはどのような形か。

6 四角形ABCDにおいて，$\angle\mathrm{DAB}=\angle\mathrm{DBC}=90°$，$\angle\mathrm{BCD}=60°$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}$，$\mathrm{BC}=1$ とする。

(1) 対角線BDの長さの 2 乗 BD^2 を求めよ。

(2) 対角線ACの長さの 2 乗 AC^2 を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{BAC}=\alpha$，$\angle\mathrm{ACD}=\beta$ とおくとき，$\cos^2\alpha$，$\cos^2\beta$ を求めよ。

7 △ABCにおいて，BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $4a\sin A=9b\sin B=16c\sin C$が成り立つとき，3辺の長さの比$a:b:c$を最も簡単な整数比で表せ。

(2) 3辺の長さの比が$a:b:c=2:(1+\sqrt{3}):\sqrt{6}$のとき，$A$，$B$を求めよ。

8 △ABCの3つの角の大きさをA，B，Cで，それらの角の対辺の長さをそれぞれa，b，cで表すとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos A$をa，b，cで，△ABCの面積SをA，b，cで表せ。

(2) S^2をa，b，cで表し，因数分解せよ。

9 △ABCにおいて，(CA+AB):(BC+CA):(AB+BC)$=5:6:7$である。次の問いに答えよ。

(1) $\sin A$を求めよ。

(2) △ABCの内接円と外接円の半径の比を求めよ。

10 AB$=3$，BC$=3$，CA$=2$である△ABCの辺AB上を動く点をPとし，AP$=t$とする。点Pから辺ACに下ろした垂線をPQ，辺BCに下ろした垂線をPRとする。ただし，点Pが点Aと一致するとき，点Qも点Aと一致し，点Pが点Bと一致するとき，点Rも点Bと一致するものとする。

(1) CQ，CRをtを用いて表せ。

(2) QRの最大値，最小値およびそのときのtの値を求めよ。

11 3辺の長さがAB$=3$，BC$=5$，CA$=7$の三角形ABCがある。辺AB，BC，CA上の点P，Q，Rを，AP$=$BQ$=$CR$=x$となるようにとる。ただし，$0<x<3$である。

(1) ∠ABCの値を求めよ。

(2) 三角形BPQの面積をxの式で表せ。

(3) 三角形PQRの面積が最小となるときのxの値を求めよ。

12 ∠ACBが直角の△ABCにおいて，∠BACの二等分線と辺BCの交点をDとする。また，AB$=20$，BD$=15$とする。

(1) $\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AC}}$の値を求めよ。

(2) 線分ADの長さを求めよ。

(3) △ABDの内接円の半径rと，外接円の半径Rを求めよ。

13 円に内接する四角形ABCDにおいて，AD＝2AB とする。また，対角線ACとBDの交点EがBDを3：2 に内分するとき，次の問いに答えよ。

(1) △ABCの面積をS_1，△ACDの面積をS_2とするとき，S_1：S_2を求めよ。

(2) BC：CDを求めよ。

(3) ∠BAD＝120°，AB＝2 とするとき，四角形ABCDの面積を求めよ。

14 水平な地面に高さhの鉄塔が垂直に立っている。鉄塔の頂点をP，地面上の異なる 2 点をA，Bとし，AB間の距離をc，AからPを見上げた角をα，∠PABをθ_A，∠PBAをθ_Bとする。次の問いに答えよ。

(1) 高さhをα，θ_A，θ_B，cを用いて表せ。

(2) 線分AB上の点からPを見上げた角の最大値をβとする。$\alpha=30°$，$\theta_A=60°$，$\theta_B=80°$のとき，$\sin\beta$を求めよ。

15 1辺の長さが1である正四面体OABCにおいて，辺ABの中点をM，辺ACの中点をNとする。次の問いに答えよ。

(1) 三角形OMNの面積を求めよ。

(2) 3点O，M，Nが定める平面をαとする。平面α上に点Pを，直線APが平面αと直交するようにとる。線分APの長さ，および四面体OAMNの体積を求めよ。

STEP・2

1 △ABCにおいて∠A，∠B，∠Cの大きさと対辺の長さをそれぞれA，B，Cおよびa，b，cで表す。△ABCの面積をSとするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}=\dfrac{\cos B}{\sin B}+\dfrac{\cos C}{\sin C}$を示せ。

(2) $\sin A$，$\sin B$，$\sin C$，$\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}$を$a$，$b$，$c$，$S$で表せ。

(3) $a\geqq b\geqq c$ならば，$\dfrac{\cos A}{\sin A}\leqq\dfrac{\cos B}{\sin B}\leqq\dfrac{\cos C}{\sin C}$となることを示せ。

2 △ABCの面積をS，内接円の半径をr，3辺の長さをa，b，cとすると

$$r=\frac{S}{\ell},\quad S=\sqrt{\ell(\ell-a)(\ell-b)(\ell-c)}$$

であることを示せ。ただし，$2\ell=a+b+c$とする。

3 3辺の長さがそれぞれ $\sqrt{x^2-2x}$，$4-x$，2 で表される三角形がある。長さ $\sqrt{x^2-2x}$ の辺は他の2辺より長さが短くないとするとき，次の問いに答えよ。

(1) このような三角形がかけるための x の満たす範囲を求めよ。

(2) この三角形の最短の辺と向かい合った角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(3) x が(1)で求めた範囲にあるときの $\cos\theta$ の最小値と，その最小値を与える x の値を求めよ。

4 △ABCにおいて，∠Aは直角で，∠B<∠Cとし，BC=2とする。∠B=θ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) 辺AB，ACの長さ，および△ABCの面積 S を θ を用いて表せ。

(2) △ABCの内接円Oの半径 r を θ を用いて表せ。

(3) 辺BCの垂直二等分線が，内接円Oと接するとき，θ と r の値を求めよ。

5 AB=5，BC=7，CA=8およびOA=OB=OC=t を満たす四面体OABCがある。

(1) ∠BACを求めよ。

(2) △ABCの外接円の半径を求めよ。

(3) 4つの頂点O，A，B，Cが同一球面上にあるとき，その球の半径が最小になるような実数 t の値を求めよ。

6 半径 r の球面上に4点A，B，C，Dがある。四面体ABCDの各辺の長さは

$$AB=\sqrt{3},\ AC=AD=BC=BD=CD=2$$

を満たしている。このとき，r の値を求めよ。

7 AB=2，AC=3，BC=t $(1<t<5)$ である三角形ABCを底面とする直三角柱 T を考える。ただし，直三角柱とは，すべての側面が底面と垂直であるような三角柱である。さらに，球 S が T の内部に含まれ，T のすべての面に接しているとする。

(1) S の半径を r，T の高さを h とする。r と h をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) T の表面積を K とする。K を最大にする t の値と，K の最大値を求めよ。