高校新演習 数学B

目　次

第 1 講	数列(1)	2
第 2 講	数列(2)	12
第 3 講	数列(3)	22
第 4 講	数列(4)	32
第 5 講	数列(5)	42
第 6 講	数列(6)	52
第 7 講	ベクトル(1)	62
第 8 講	ベクトル(2)	72
第 9 講	ベクトル(3)	82
第10講	ベクトル(4)	92
第11講	ベクトル(5)	102
第12講	ベクトル(6)	112

第1講 >>> 数　列　(1)

基　礎　学　習

1 数　列

正の奇数を小さい順に並べると

1, 3, 5, ❶ [　　], 9, ❷ [　　], ❸ [　　], 15, …　……Ⓐ

のような数の列ができる。

また，40の約数を小さい順に並べると

1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40　……Ⓑ

のように，8個の数の列ができる。

このように，ある一定の規則にしたがって数を一列に並べたものを数列といい，数列の各数を数列の項という。

数列Ⓑのように，項の個数が有限である数列を有限数列といい，数列Ⓐのように，項が無限に続く数列を無限数列という。

数列の項は，はじめから順に，第1項，第2項，第3項，…といい，n番目の項を第n項という。

とくに，第1項を初項ともいい，有限数列においては項の数を項数，最後の項を末項という。

例　有限数列Ⓑにおいて

初項は ❹ [　　] であり，第5項は ❺ [　　]，末項は ❻ [　　]，項数は ❼ [　　] である。

↔ 40を素因数分解すると

$40=2^3\times5$

であるから，約数の個数は

$4\times2=8$(個)

である。

↔ 例えば，15以下の素数を小さい順に並べた数列を作れば

2, 3, 5, 7, 11, 13

であり，この数列において

初項は，2

末項は，13

項数は，6

である。

2 数列の一般項

数列を一般的に表すには，初項をa_1，第2項をa_2，第3項をa_3，…として，次のように表す。

a_1, a_2, a_3, …, a_n, …　……Ⓒ

例えば，1の数列Ⓐにおいて第n項a_nは，$a_n=2n-1$と表され，nに1, 2, 3, …の値を代入すると，数列Ⓐの各項を求めることができる。

このように，第n項a_nをnの式で表したとき，これを数列の一般項という。

また，Ⓒのように表された数列を$\{a_n\}$と表すことがある。

例　数列Ⓐの一般項が$a_n=2n-1$で表されることを用いれば

第5項は，$a_5=2\cdot$ ❽ [　　] $-1=$ ❾ [　　]

第10項は，$a_{10}=2\cdot$ ❿ [　　] $-1=$ ⓫ [　　]

第87項は，$a_{87}=2\cdot$ ⓬ [　　] $-1=$ ⓭ [　　]

↔ 例えば，$a_n=3n-2$

である数列$\{a_n\}$においては

$a_1=3\cdot1-2=1$

$a_5=3\cdot5-2=13$

$a_{12}=3\cdot12-2=34$

である。

↔ 数列Ⓐにおいて

$a_n=2n-1$

であるから，数列Ⓐは

数列$\{2n-1\}$と書くこともある。

解答　❶ 7　❷ 11　❸ 13　❹ 1　❺ 8　❻ 40　❼ 8　❽ 5　❾ 9　❿ 10　⓫ 19　⓬ 87　⓭ 173

例題１

自然数１，２，３，…を順番に，１段目に１個，２段目に２個，３段目に３個，…と，右図のように並べたとき，各段の左端の数を取り出して並べた数列１，２，４，７，11，…において，初項，第３項，第５項，第６項，第７項を求めよ。

```
        1
      2   3
    4   5   6
  7   8   9   10
11  12  13  14  15
……………………
```

解答

左端の数を取り出して並べた数列より

初項は，$\boxed{1}$，第３項は，$\boxed{2}$，第５項は，$\boxed{3}$

また，６段目の６個の数は，16，17，18，19，20，21であるから

第６項は，$\boxed{4}$

７段目の７個の数は，22，23，24，25，26，27，28であるから

第７項は，$\boxed{5}$

類題１　**例題１**と同様に自然数を並べたとき，各段の右端の数を取り出して並べた数列において，第８項，第10項を求めよ。

例題２

一般項a_nが次の式で表される数列$\{a_n\}$の初項から第５項までを求めよ。

(1)　$a_n=3n-2$　　(2)　$a_n=(-1)^n\cdot n$

解答

与えられたa_nの式に，$n=1$，2，3，4，5を代入して

(1)　$a_1=\boxed{6}$，$a_2=\boxed{7}$，$a_3=\boxed{8}$，$a_4=\boxed{9}$，$a_5=\boxed{10}$

(2)　$a_1=\boxed{11}$，$a_2=\boxed{12}$，$a_3=\boxed{13}$，$a_4=\boxed{14}$，$a_5=\boxed{15}$

類題２　一般項a_nが次の式で表される数列$\{a_n\}$の初項から第５項までを求めよ。

(1)　$a_n=7n+1$　　(2)　$a_n=(-2)^n\cdot n^2$

例題３

次のような数列の一般項a_nをnの式で表せ。

(1)　自然数の平方に符号－，＋を交互につけた数列

-1，4，-9，16，-25，…

(2)　100から奇数１，３，５，７，９，…をひいた数列

99，97，95，93，91，…

解答

(1)　一般項が$(-1)^n$の数列は-1と１が交互に表れることを用いて

$a_n=\boxed{16}$

(2)　n番目の奇数は$2n-1$であるから

$a_n=100-(2n-1)=\boxed{17}$

類題３　20に偶数の平方４，16，36，64，…を加えた数列の一般項a_nをnの式で表せ。

ヒント

初項から第５項までは図を見れば求められる。

第６項，第７項は，６段目と７段目を実際に書いてみるとよい。

あるいは

$$1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ \square,\ \square$$
$$+1\ +2\ +3\ +4\ +5\ +6$$

と，数列の作り方を調べてもよい。

例題１の答

1　1　2　4　3　11
4　16　5　22

$a_n=3n-2$ のとき

$a_{\bigcirc}=3\times\bigcirc-2$

同じ数

であるから

$a_1=3\times1-2$

$a_2=3\times2-2$

$a_3=3\times3-2$

⋮

と求めていく。

例題２の答

6　1　7　4　8　7
9　10　10　13　11　-1
12　2　13　-3　14　4
15　-5

－，＋が交互に現れる数列は

$(-1)^n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

を基本として考えるとよい。

なお，＋，－が交互に現れる数列は

$(-1)^{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

と表すことができる。

例題３の答

16　$(-1)^n\cdot n^2$
17　$-2n+101$

3 等差数列

3で割ると2余る自然数を小さい順に並べた数列は

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, … ……Ⓐ

この数列は，初項2に次々と3を加えても得ることができる。

一般に，数列a_1, a_2, a_3, …, a_n, a_{n+1}, …において，各項に一定の数dを加えると次の項が得られるとき，この数列を等差数列といい，dを公差という。

すなわち，すべての自然数nについて

$a_{n+1}=a_n+d$　　すなわち，$a_{n+1}-a_n=d$

が成り立つ数列が等差数列である。

上に示した数列Ⓐは，初項 ❶ ，公差 ❷ の等差数列であり，

$a_{n+1}-a_n=$ ❸ が成り立つ。

例　初項10，公差-3の等差数列の初項から第8項までを書き並べると

10, 7, 4, ❹ , ❺ , -5, ❻ , ❼

⇔ $2, 5, 8, 11, 14, \cdots$（$+3$ $+3$ $+3$ $+3$）

⇔ $\cdots, \boxed{a_n, a_{n+1}}, \cdots$（$+d$）

⇓

この部分を式で表すと

$a_{n+1}=a_n+d$

⇔ $10, 7, 4, \boxed{}, \cdots$（$+(-3)$ $+(-3)$ $+(-3)$）

4 等差数列の一般項

初項a，公差dの等差数列$\{a_n\}$の各項は

$a_1=a$

$a_2=a+d$

$a_3=a+2d$

$a_4=a+3d$

⋮

（$+d$ $+d$ $+d$）

であるから，この数列の一般項a_nをaとdの式で表せば

$a_n=a+(n-1)d$

例　初項2，公差5の等差数列$\{a_n\}$の一般項a_nは

$a_n=2+(n-1)\cdot 5=5n-3$ ……㊟

である。また，第10項と第15項を求めると

$a_{10}=2+$ ❽ $\cdot 5=$ ❾ ，$a_{15}=2+$ ❿ $\cdot 5=$ ⓫

⇔ $a_{○}=a+\boxed{}d$

$\boxed{}$は○より1だけ小さい数になっている。

⇔ ㊟を用いれば

$a_{10}=5\cdot 10-3$

$a_{15}=5\cdot 15-3$

と求めることもできる。

5 等差数列をなす3数

3つの数a, b, cがこの順に等差数列であるとき，公差をとって

$b-a=c-b$　　すなわち，$2b=a+c$

が成り立つ。

例　3つの数7，x，15がこの順に等差数列をなすとき

⓬ $x=7+15$ より，$x=$ ⓭

⇔ a, b, c より，（$+d$ $+d$）

$d=b-a=c-b$

であることがわかる。

解答　❶ 2　❷ 3　❸ 3　❹ 1　❺ −2　❻ −8　❼ −11　❽ 9　❾ 47　❿ 14　⓫ 72　⓬ 2　⓭ 11

例題4

初項-13，第2項-10の等差数列$\{a_n\}$において，第20項a_{20}と一般項a_nを求めよ。

解答

公差をdとすれば，$d=\left(\boxed{1}\right)-\left(\boxed{2}\right)=3$

よって，$a_{20}=-13+\left(\boxed{3}-1\right)\cdot 3=\boxed{4}$

$a_n=-13+(n-1)\cdot 3=\boxed{5}\,n-\boxed{6}$

類題4　初項5，第2項-3の等差数列$\{a_n\}$において，第15項a_{15}と一般項a_nを求めよ。

例題5

次の問いに答えよ。

(1)　初項が5，第10項が86の等差数列について，公差と一般項を求めよ。

(2)　公差が5，第16項が72の等差数列について，初項と一般項を求めよ。

(3)　第3項が9，第8項が29の等差数列について，初項と公差を求めよ。

解答

(1)　公差をdとすれば，第10項について，$\boxed{7}+\left(\boxed{8}-1\right)d=86$

この方程式を解いて，公差は，$d=\boxed{9}$

一般項は，$5+(n-1)\cdot\boxed{9}=\boxed{10}\,n-\boxed{11}$

(2)　初項をaとすれば，第16項について，$a+\left(\boxed{12}-1\right)\cdot 5=72$

この方程式を解いて，初項は，$a=\boxed{13}$

一般項は，$\boxed{13}+(n-1)\cdot 5=\boxed{14}\,n-\boxed{15}$

(3)　初項をa，公差をdとすれば

第3項が9より，$a+\boxed{16}\,d=9$　……Ⓐ

第8項が29より，$a+\boxed{17}\,d=29$　……Ⓑ

Ⓑ−Ⓐ より，$5d=20$　よって，$d=\boxed{18}$　Ⓐより，$a=\boxed{19}$

類題5　次の問いに答えよ。

(1)　公差が3，第10項が20の等差数列について，初項と一般項を求めよ。

(2)　第5項が1，第9項が33の等差数列について，初項と公差を求めよ。

例題6

3つの数$2x-1$，10，$x+9$がこの順に等差数列をなすとき，xの値を求めよ。

解答

$2x-1$，10，$x+9$がこの順に等差数列をなすから

$\boxed{20}\cdot 10=(2x-1)+(x+9)$　よって，$x=\boxed{21}$

類題6　3つの数21，$x+9$，$3x-8$がこの順に等差数列をなすとき，xの値を求めよ。

ヒント

point

等差数列

初項a，公差dの等差数列の一般項をa_nとすれば

$a_n=a+(n-1)d$

↔ 数列$\{a_n\}$の公差をdとすれば

$d=a_2-a_1$

例題4の答

1	-10	2	-13		
3	20	4	44	5	3
6	16				

↔ 初項が5，公差がdのとき，第10項a_{10}は

$a_{10}=5+(10-1)d$

↔ 初項がa，公差が5のとき，第16項a_{16}は

$a_{16}=a+(16-1)\cdot 5$

↔ 初項a，公差dのとき

第3項a_3は

$a_3=a+2d$

第8項a_8は

$a_8=a+7d$

例題5の答

7	5	8	10	9	9
10	9	11	4	12	16
13	-3	14	5	15	8
16	2	17	7	18	4
19	1				

↔ 3つの数a，b，cがこの順に等差数列をなす

$\Longleftrightarrow 2b=a+c$

例題6の答

20	2	21	4

6 等差数列の和

初項 a，公差 d の等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。
第 n 項を l とすれば，和 S_n は

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-d)+l \quad \cdots\cdots Ⓐ$$

また，上の S_n の式の右辺の和の順序を逆にして表すと

$$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+d)+a \quad \cdots\cdots Ⓑ$$

ここで，ⒶとⒷの左辺と右辺をそれぞれ加えると

$$\begin{array}{rl} S_n= & a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-d)+l \\ +)\ S_n= & l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+d)+a \\ \hline 2S_n= & \underbrace{(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)}_{n\text{個の}(a+l)\text{の和}} \end{array}$$

よって，$2S_n=n(a+l)$ より，$S_n=$ ❶

さらに，l はこの等差数列の第 n 項であるから，$l=a+(n-1)d$ より

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{n\{a+a+(n-1)d\}}{2}= ❷$$

> 初項 a，公差 d，末項(第 n 項) l，項数 n の等差数列の和 S_n は
>
> (1) a，l，n を用いると，$S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$
>
> (2) a，d，n を用いると，$S_n=\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

例 次の等差数列の和 S_{15} を求めると

(1) 初項 3，末項31，項数15のとき，$S_{15}=\dfrac{15(3+31)}{2}=$ ❸

(2) 初項 3，公差 2，項数15のとき，$S_{15}=\dfrac{15\{2\cdot3+(15-1)\cdot2\}}{2}=$ ❹

←→ 初項 a，公差 d，末項 l の等差数列 $\{a_n\}$ において

$$\begin{array}{ll} a_1=a & \\ & +d \\ a_2=a+d & \\ & +d \\ a_3=a+2d & \\ \vdots & \\ a_{n-2}=l-2d & \\ & -d \\ a_{n-1}=l-d & \\ & -d \\ a_n=l & \end{array}$$

point

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列の第 n 項は

$a+(n-1)d$

←→ この例の 2 つの数列(1)，(2)は，実は同じ数列である。なぜなら，(2)において，末項(第15項)は

$3+(15-1)\cdot2$
$=3+14\cdot2=31$

であり，(1)に一致する。

7 自然数の和

1 から n までの自然数の和は，初項 1，末項 n，項数 n の等差数列の和であるから

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

例 $1+2+3+\cdots+100=\dfrac{100(100+1)}{2}=$ ❺

←→ 1 からはじまる n 個の奇数の和は，初項 1，公差 2 の等差数列であるから

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)$$
$$=\frac{n\{1+(2n-1)\}}{2}=n^2$$

解答 ❶ $\dfrac{n(a+l)}{2}$ ❷ $\dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$ ❸ 255 ❹ 255 ❺ 5050

例題7

次の等差数列の和を求めよ。

(1) 初項10，末項１，項数18　　(2) 初項-3，公差$\frac{1}{3}$，項数55

解答

(1) 右の和の公式(1)より，$S_{18}=\frac{18(10+1)}{2}=\boxed{1}$

(2) 右の和の公式(2)より，$S_{55}=\frac{55\left\{2\cdot(-3)+(55-1)\cdot\frac{1}{3}\right\}}{2}=\frac{55\cdot\boxed{2}}{2}=\boxed{3}$

類題7　次の等差数列の和を求めよ。

(1) 初項１，末項33，項数９　　(2) 初項７，公差-3，項数30

例題8

次の等差数列の和を求めよ。

(1) 1，5，9，…，65　　(2) 初項が105で，第16項が０，項数30

解答

(1) この等差数列は，初項１，公差４であるから，65が第n項とすれば

$1+(n-1)\cdot 4=65$ より，$n=\boxed{4}$

よって，求める和は，$S_{\boxed{4}}=\frac{\boxed{4}\left(1+\boxed{5}\right)}{2}=\boxed{6}$

(2) この等差数列の公差をdとすれば，第16項について

$105+(16-1)d=0$ より，$d=\boxed{7}$

よって，求める和は

$$S_{30}=\frac{30\left\{2\cdot\boxed{8}+\left(\boxed{9}-1\right)\cdot\left(\boxed{7}\right)\right\}}{2}=\boxed{10}$$

類題8　次の等差数列の和を求めよ。

(1) 4，7，10，…，100

(2) 初項が-10で，第15項が32，項数20

例題9

90以下の自然数について，次の和を求めよ。

(1) ３で割り切れる数の和　　(2) ３で割り切れない数の和

解答

(1) ３で割り切れる数は，3，6，9，…，90で，初項３，末項90，項数$\boxed{11}$の

等差数列であるから，その和をSとすれば，$S=\frac{\boxed{11}(3+90)}{2}=\boxed{12}$

(2) 求める和は，１から90までの自然数の和からSをひけばよいから

$$\frac{\boxed{13}\left(\boxed{13}+1\right)}{2}-\boxed{12}=\boxed{14}$$

類題9　100以下の自然数について，５で割り切れない数の和を求めよ。

ヒント

point

等差数列の和の公式

(1) 初項a，末項l，項数nの等差数列の和は

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

(2) 初項a，公差d，項数nの等差数列の和は

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

例題7の答

1 99　2 12　3 330

↔ 和の公式(1)を用いる。

↔ 和の公式(2)を用いる。

例題8の答

4 17　5 65　6 561

7 -7　8 105

9 30　10 105

↔ 和の公式(1)を用いる。

↔ 自然数の和については，和の公式(1)を用いる。

例題9の答

11 30　12 1395

13 90　14 2700

✓ 確認問題演習

1 30以下の素数を小さい順に並べた数列を作る。このとき，初項，第 6 項，末項を求めよ。⇔ **例題1**

2 一般項a_nが次の式で表される数列$\{a_n\}$の初項から第 5 項までを求めよ。⇔ **例題2**

(1) $a_n=2^n-n$　　(2) $a_n=(-1)^n\cdot n^2+3n$

3 次のような数列の一般項a_nを n の式で表せ。⇔ **例題3**

(1) 0 と 2 を交互に並べた数列

0，2，0，2，0，…

(2) 50に奇数 1，3，5，…を加えた数列

51，53，55，57，59，…

4 初項 -9，第 2 項 0 の等差数列$\{a_n\}$において，第19項a_{19}と一般項a_nを求めよ。⇔ **例題4**

5 第 2 項が 8，第10項が -16 の等差数列において，初項と公差，一般項を求めよ。⇔ **例題5**

6 3 つの数 x，$2x-5$，$-x+22$ がこの順に等差数列をなすとき，x の値を求めよ。⇔ **例題6**

7 初項 -9，公差 7，項数10の等差数列の和を求めよ。⇔ **例題7**

8 初項 1，第20項 -37，項数40の等差数列の和を求めよ。⇔ **例題8**

9 96以下の自然数について，次の和を求めよ。⇔ **例題9**

(1) 一の位が 7 の数の和

(2) 一の位が 7 でない数の和

基本問題演習

1 一般項a_nが次の式で表される数列$\{a_n\}$の初項から第5項までを求めよ。

(1) $a_n=\dfrac{3-n}{2+n}$ (2) $a_n=\dfrac{1-(-1)^n}{2}$

2 次の問いに答えよ。

(1) 等差数列1，5，9，…について，第10項と，初項から第10項までの和を求めよ。

(2) 第3項が14，第7項が2の等差数列の初項と公差を求めよ。また，一般項と，初項から第n項までの和を求めよ。

3 4つの数7，a，12，bがこの順に等差数列をなすとき，a，bの値を求めよ。

4 150以下の自然数のなかで，３で割り切れる数の和をS，３で割ると１余る数の和をT，３で割ると２余る数の和をUとして，S，T，Uの値をそれぞれ求めよ。

5 等差数列$\{a_n\}$において，初項$a_1=2$，第７項$a_7=44$であるとき，次の問いに答えよ。

(1) 公差を求めよ。

(2) 初めて500をこえるのは第何項か。

(3) この数列に表れる500以下の項の和を求めよ。

6 公差が-6で，第18項が-2である等差数列について，次の問いに答えよ。

(1) 初項を求めよ。

(2) 初項から第何項までの和が最大となるか。また，その和の最大値を求めよ。

応用問題演習

1 次の問いに答えよ。

(1) 公差 5，第16項が72である等差数列について，初項と一般項，初項から第 n 項までの和を求めよ。

(2) 初項 -3，公差 4，末項193である等差数列について，初項から末項までの和を求めよ。

(3) 初項が 1 の等差数列において，初項から第 5 項までの和と初項から第10項までの和が等しい。この等差数列の公差と第10項を求めよ。

2 4 つの数 a，4，b，$6a$ がこの順に等差数列をなすとき，a，b の値を求めよ。

3 数列 $\{a_n\}$：a_1，a_2，a_3，…に対し，逆数の数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$：$\dfrac{1}{a_1}$，$\dfrac{1}{a_2}$，$\dfrac{1}{a_3}$，…が等差数列となるとき，数列 $\{a_n\}$ を調和数列という。

いま，4，3，x，y，…が調和数列であるとき，次の問いに答えよ。

(1) x，y の値を求めよ。

(2) この調和数列の一般項(第 n 項)を求めよ。

4 初項100，公差 -3 の等差数列について，次の問いに答えよ。

(1) 第何項が初めて負の数となるか。

(2) 初項から第何項までの和が最大となるか。また，その和の最大値を求めよ。