第3講　複素数と方程式(1)　複素数

基　礎　学　習

1　虚数単位

実数は平方しても負になることはなく

(実数)$^2 \geqq 0$

である。これに対して，平方して負となる数を考える。

平方して -1 となる新しい数を1つ考え，それを文字 i で表す。この i を虚数単位という。すなわち

$i^2=$ ❶ $\boxed{}$

である。

2　複素数

虚数単位 i と実数 a, b を用いて

$a+bi$

の形で表される数を考える。このような数を複素数という。

(ア)　$a=2$, $b=3$ のときの $2+$ ❷ $\boxed{}\, i$

(イ)　$a=-3$, $b=0$ のときの -3

(ウ)　$a=0$, $b=-5$ のときの ❸ $\boxed{}\, i$

などはいずれも複素数である。

(イ)のように，$b=0$ のときは実数 a を表す。

これに対して，(ア), (ウ)のように，$b\neq0$ のときは ❹ $\boxed{}$ という。

$$\text{複素数 } a+bi \begin{cases} \text{実数} & (b=0) \\ \text{❹}\boxed{} & (b\neq0) \end{cases}$$

特に，(ウ)のように，$a=0$, $b\neq0$ のときは純虚数という。

また，複素数 $a+bi$ の a を実部，b を虚部という。

例　$5-4i$ の実部は ❺ $\boxed{}$，虚部は ❻ $\boxed{}$ である。

3　複素数の相等

2つの複素数が等しいとは，実部と虚部がそれぞれ等しいことである。

すなわち，a, b, c, d を実数とすると

$a+bi=c+di \Longleftrightarrow a=$ ❼ $\boxed{}$ かつ $b=$ ❽ $\boxed{}$

特に，$a+bi=0 \Longleftrightarrow a=b=$ ❾ $\boxed{}$

例　等式 $p-3i=5+qi$ を満たす実数 p, q の値は

$p=$ ❿ $\boxed{}$，$q=$ ⓫ $\boxed{}$ である。

⇔ 複素数の分類

複素数 $a+bi$

実数 a $(b=0)$	虚数 $a+bi$ $(b\neq0)$
	純虚数 bi $(a=0)$

⇔ 虚部についての注意

虚部は b であって bi ではない。

虚部 b は実数である。

⇔ $0=0+0i$

解答　❶ -1　❷ 3　❸ -5　❹ 虚数　❺ 5　❻ -4　❼ c　❽ d　❾ 0　❿ 5　⓫ -3

例題 1-1　[複素数(1)]　➡1, 2

次の数は，a：実数，b：純虚数，c：純虚数でない虚数　のいずれか，記号で答えよ。

(1)　$3-2i$　　(2)　$\sqrt{7}$　　(3)　$-\frac{3}{2}i$　　(4)　0　　(5)　$\sqrt{5}\,i-2$

解答

それぞれ，実部，虚部が 0 かどうかを確かめる。

(1) ① ____　(2)　a　(3) ② ____　(4) ③ ____　(5)　c

例題 1-2　[複素数(2)]　➡1, 2

x を実数とするとき，次の複素数の実部と虚部を求めよ。また，(2)は虚数となるための x の条件を求めよ。

(1)　$4-7i$　　(2)　$3x-2+(4-x)i$

解答

(1)　実部は ④ ____，虚部は ⑤ ____

(2)　実部は $3x-2$，虚部は ⑥ ____

虚数となるための条件は ⑦ ____

類題 1　x を実数とするとき，次の複素数の実部と虚部を求めよ。また，(2)は虚数となるための x の条件を求めよ。

(1)　$-3-5i$　　(2)　$x+2+(3x-4)i$

例題 2　[複素数の相等]　➡3

次の等式を満たす実数 p，q の値を求めよ。

(1)　$p+qi=-4+3i$　　(2)　$(p+2)+(p+q)i=q+12i$

解答

複素数の相等条件を用いる。

(1)　$p=$ ⑧ ____，$q=$ ⑨ ____

(2)　$p+2=$ ⑩ ____，$p+q=$ ⑪ ____

よって，$p=$ ⑫ ____，$q=$ ⑬ ____

類題 2　次の等式を満たす実数 p，q の値を求めよ。

(1)　$p+qi=5-i$　　(2)　$(p+q)+(p-3)i=7-2i$

ヒント

0 について

$0=0+0i$

例題 1-1 の答

① c　② b　③ a

実部・虚部

$a+bi$ において

実部は a，虚部は b

虚数となるとき，$b \neq 0$

例題 1-2 の答

④ 4　⑤ -7

⑥ $4-x$　⑦ $x \neq 4$

複素数の相等条件

a，b，c，d を実数とすると

$a+bi=c+di$

$\iff a=c$ かつ $b=d$

例題 2 の答

⑧ -4　⑨ 3　⑩ q

⑪ 12　⑫ 5　⑬ 7

4 複素数の加法・減法

2つの複素数 $a+bi$ と $c+di$ の和と差は，次のように計算する。

和：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

差：$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

例 $(3+4i)+(2-5i)=(3+2)+\left(\boxed{\text{❶}\quad}-5\right)i=\boxed{\text{❷}\quad}$

$(3+4i)-(2-5i)=\left(\boxed{\text{❸}\quad}-2\right)+(4+5)i=\boxed{\text{❹}\quad}$

↔ i を x や y のような文字と同じように取り扱えばよい。

5 複素数の乗法

2つの複素数 $a+bi$ と $c+di$ の積は，次のように計算する。

積：$(a+bi)(c+di)=ac+(ad+bc)i+bdi^2$

$=ac+(ad+bc)i+bd\cdot(-1)$

$=(ac-bd)+(ad+bc)i$

例 $(3+4i)(2-5i)=6-\boxed{\text{❺}\quad}i-20i^2$

$=6-\boxed{\text{❺}\quad}i-20\cdot\left(\boxed{\text{❻}\quad}\right)$

$=\boxed{\text{❼}\quad}$

↔ i を x や y のような文字と同じように取り扱い，i^2 が現れたら -1 に置き換える。

6 共役な複素数

複素数 $\alpha=a+bi$ に対して，$a-bi$ を α と共役な複素数といい，$\overline{\alpha}$ で表す。

例 $\alpha=-4+5i$ と共役な複素数は $\overline{\alpha}=\boxed{\text{❽}\quad}$ である。

実数 a と共役な複素数は a 自身である。

共役な複素数の和と積は実数となる。

注意

b は負のこともあるので注意すること。

↔ $\overline{\alpha}$ は α バーと読む。

↔ $(a+bi)+(a-bi)$
$=2a$
$(a+bi)(a-bi)$
$=a^2-b^2i^2$
$=a^2-b^2\cdot(-1)$
$=a^2+b^2$

7 複素数の除法

2つの複素数 $a+bi$ と $c+di$ の商については

分母と分子に，分母と共役な複素数をかけて，分母を実数で表す。

商：$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}$

$=\dfrac{ac+(-ad+bc)i-bd\cdot(-1)}{c^2-d^2\cdot(-1)}$

$=\dfrac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

例 $\dfrac{3+4i}{2-5i}=\dfrac{(3+4i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}=\dfrac{6+\boxed{\text{❾}\quad}i+20i^2}{\boxed{\text{❿}\quad}-25i^2}$

$=\dfrac{6+\boxed{\text{❾}\quad}i+20\cdot\left(\boxed{\text{⓫}\quad}\right)}{\boxed{\text{❿}\quad}-25\cdot\left(\boxed{\text{⓬}\quad}\right)}=\boxed{\text{⓭}\quad}+\boxed{\text{⓮}\quad}i$

↔ $2-5i$ と共役な複素数は，$2+5i$ である。

4，**5**，**7** のように，複素数の四則演算の結果は複素数となる。

解答 ❶ 4　❷ $5-i$　❸ 3　❹ $1+9i$　❺ 7　❻ -1　❼ $26-7i$　❽ $-4-5i$
❾ 23　❿ 4　⓫ -1　⓬ -1　⓭ $-\dfrac{14}{29}$　⓮ $\dfrac{23}{29}$

例題3　[複素数の加法・減法] ➡4

次の計算をせよ。

(1)　$(2-3i)+(4+7i)$　　　(2)　$\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}i\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}i\right)$

解答

(1)　$(2-3i)+(4+7i)=\left(2+\boxed{1}\right)+\left(-3+\boxed{2}\right)i$

$=\boxed{3}+\boxed{4}\,i$

(2)　$\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}i\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}i\right)=\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}+\boxed{5}\right)i=\boxed{6}$

類題3　次の計算をせよ。

(1)　$(5+6i)-(-8+9i)$　　　(2)　$\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}i\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{5}{6}i\right)$

例題4　[複素数の乗法] ➡5

次の計算をせよ。

(1)　$(1+i)(3-i)$　　　(2)　$(4-3i)^2$

解答

(1)　$(1+i)(3-i)=3+\boxed{7}\,i-i^2=3+\boxed{7}\,i-\left(\boxed{8}\right)$

$=\boxed{9}+\boxed{7}\,i$

(2)　$(4-3i)^2=16-24i+\boxed{10}\,i^2=16-24i+\boxed{10}\cdot\left(\boxed{11}\right)$

$=\boxed{12}$

類題4　次の計算をせよ。

(1)　$(2-i)(5+i)$　　　(2)　$(3+2i)^2$

例題5　[複素数の除法] ➡6, 7

次の計算をせよ。

(1)　$\frac{3}{i}$　　　(2)　$\frac{4-3i}{1+i}$

解答

(1)　$\frac{3}{i}=\frac{3\cdot\left(\boxed{13}\right)}{i\cdot\left(\boxed{13}\right)}=\frac{\boxed{14}}{-i^2}=\frac{\boxed{14}}{-\left(\boxed{15}\right)}=\boxed{16}$

(2)　$\frac{4-3i}{1+i}=\frac{(4-3i)\left(\boxed{17}\right)}{(1+i)\left(\boxed{17}\right)}=\frac{4-\boxed{18}\,i+\boxed{19}\,i^2}{1-i^2}$

$=\frac{4-\boxed{18}\,i+\boxed{19}\cdot\left(\boxed{20}\right)}{1-\left(\boxed{21}\right)}=\boxed{22}-\boxed{23}\,i$

類題5　次の計算をせよ。

(1)　$-\frac{6}{i}$　　　(2)　$\frac{2+5i}{3-i}$

ヒント

⟷ i は文字のように取り扱えばよい。

例題3の答

1	4	2	7	3	6
4	4	5	$\frac{1}{6}$		
6	$\frac{3}{20}+\frac{1}{2}i$				

⟷ i を文字のように取り扱い，i^2 が現れたら -1に置き換える。

例題4の答

7	2	8	-1	9	4
10	9	11	-1		
12	$7-24i$				

⟷ 分母と分子に，分母と共役な複素数をかける。
(1)では $-i$，(2)では $1-i$

例題5の答

13	$-i$	14	$-3i$		
15	-1	16	$-3i$		
17	$1-i$	18	7	19	3
20	-1	21	-1		
22	$\frac{1}{2}$	23	$\frac{7}{2}$		

8 実数と複素数の類似点と相違点

複素数には実数と同じような計算法則が成り立つ。

例えば，$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$　(加法についての結合法則)

$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$　(分配法則)

などである。さらに

$\alpha\beta=0 \Longleftrightarrow \alpha=0$ または $\beta=$ ❶ $\boxed{}$　……㊟

も成り立つ。

しかし，実数とは異なり，虚数については大小関係や正負は考えない。

9 負の数の平方根

8 の㊟を用いて，負の数の平方根を考える。

$a>0$ のとき，$-a=(\sqrt{a}\,i)^2$ と表すことができ

$x^2+a=x^2-(\sqrt{a}\,i)^2=(x+\sqrt{a}\,i)\left(x-\boxed{❷}\right)$

と因数分解できるから，㊟より，$x^2+a=0$，すなわち，$x^2=-a$ の解は

$x=\pm\sqrt{a}\,i$

である。すなわち，$a>0$ のとき，$-a$ の平方根は $\pm\sqrt{a}\,i$ である。

例　-3 の平方根は ❸ $\boxed{}$ である。

10 負の数の平方根の計算

負の数の平方根については，$\sqrt{-2}$ のように，根号内に負の数を入れる表記があり

$a>0$ のとき，$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　　特に，$\sqrt{-1}=i$

と定める。

$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{-a}$ や $\sqrt{-b}$ についての計算では

$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$,　$\sqrt{-b}=\sqrt{b}\,i$

と根号内を正の数に直して

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab},\quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

などを用いて計算する。

例 (1) $\sqrt{-2}+\sqrt{-8}=\sqrt{2}\,i+\boxed{❹}=\boxed{❺}$

(2) $\sqrt{-2}\times\sqrt{-8}=\sqrt{2}\,i\times\boxed{❹}=\boxed{❻}$

(3) $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-8}}=\dfrac{\sqrt{2}\,i}{\boxed{❹}}=\boxed{❼}$

(4) $\dfrac{\sqrt{-2}}{\sqrt{8}}=\dfrac{\sqrt{2}\,i}{2\sqrt{2}}=\boxed{❽}$

(5) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-8}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\boxed{❹}}=\boxed{❾}$

(注)　$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{ab}$，$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}=\sqrt{-\dfrac{a}{b}}$ は成り立たない。

⟷ α，β，γ はギリシャ文字で，それぞれ「アルファ」「ベータ」「ガンマ」と読む。

⟷ すなわち，虚数については不等号は使えない。

⟷ a の平方根とは，平方して a となる数(a が負でも同じ)である。

⟷ $(\sqrt{a})^2=a$，$i^2=-1$

⟷ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

⟷ この表記を用いると，$a>0$ のとき，$-a$ の平方根は $\pm\sqrt{-a}$ と表される。

⚠注意

根号内が負の数のときは，i を用いて，根号内を正の数にしてから計算する。

$\sqrt{-2}\times\sqrt{-8}$

$=\sqrt{(-2)\times(-8)}$

と計算しないこと。

⟷ $\dfrac{1}{i}=\dfrac{-i}{i\cdot(-i)}=\dfrac{-i}{-i^2}$
$=-i$

解答　❶ 0　❷ $\sqrt{a}\,i$　❸ $\pm\sqrt{3}\,i$　❹ $2\sqrt{2}\,i$　❺ $3\sqrt{2}\,i$　❻ -4　❼ $\dfrac{1}{2}$　❽ $\dfrac{1}{2}i$　❾ $-\dfrac{1}{2}i$

例題6-1　［実数と複素数］➡8

次の問いに答えよ。

(1)　a，b が実数のとき，$a^2+b^2=0$ を成り立たせる a，b の値を求めよ。

(2)　$\alpha=2+3i$，$\beta=p+qi$（p，q は実数）のとき，
　$\alpha\overline{\alpha}$，$\beta\overline{\beta}$ が実数となることを利用して，$\alpha\beta=0$ のときの p，q の値を求めよ。

解答

(1)　a，b は実数であるから，$a^2\geqq 0$，$b^2\geqq 0$

よって，$a^2+b^2\geqq$ [1]　（等号成立は，$a=b=0$ に限る。）

ゆえに，$a^2+b^2=0$ ならば，$a=$ [2]，$b=$ [3]

(2)　$\alpha\overline{\alpha}=(2+3i)(2-3i)=$ [4]　……①

$\beta\overline{\beta}=(p+qi)(p-qi)=$ [5]　……②

$\alpha\beta=0$ の両辺に $\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ をかけると，$\alpha\overline{\alpha}\cdot\beta\overline{\beta}=0$

①，②より，[4]([5])$=0$　　[5]$=0$

(1)より，$p=$ [6]，$q=$ [7]

例題6-2　［負の数の平方根］➡9

次の数の平方根を求めよ。

(1)　-36　　　(2)　-125

解答

(1)　$\pm\sqrt{36}\,i=$ [8]　　　(2)　$\pm\sqrt{125}\,i=$ [9]

類題6　次の数の平方根を求めよ。

(1)　-100　　　(2)　-162

例題7　［負の数の平方根の計算］➡10

次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt{-2}\times\sqrt{-32}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{-5}}$　　(3)　$(\sqrt{-3}+2)^2$

解答

(1)　$\sqrt{-2}\times\sqrt{-32}=\sqrt{2}\,i\times 4\sqrt{2}\,i=$ [10]

(2)　$\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{-5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{\text{[11]}}=\dfrac{\text{[12]}}{i}=$ [13]

(3)　$(\sqrt{-3}+2)^2=(\sqrt{3}\,i+2)^2=$ [14] $i^2+4\sqrt{3}\,i+4=$ [15] $+4\sqrt{3}\,i$

類題7　次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt{-27}\times\sqrt{-3}$　　(2)　$\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{-2}}$　　(3)　$(\sqrt{-2}-3)^2$

ヒント

例題6-1の答

1 0　2 0　3 0
4 13　5 p^2+q^2
6 0　7 0

⇔ $a>0$ のとき，$-a$ の平方根は，$\pm\sqrt{a}\,i$

例題6-2の答

8 $\pm 6i$　9 $\pm 5\sqrt{5}\,i$

⇔ 根号内が負の数のとき
$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ $(a>0)$
として計算する。

⇔ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

例題7の答

10 -8　11 $\sqrt{5}\,i$
12 3　13 $-3i$　14 3
15 1

確認問題

1 x を実数とするとき，次の複素数の実部と虚部を求めよ。また，(2)は虚数となるための x の条件を求めよ。 ↔ **例題1-2**

(1) $6+i$　　(2) $5x-4-(6x+3)i$

2 次の等式を満たす実数 p，q の値を求めよ。↔ **例題2**

(1) $p+qi=-8-9i$　　(2) $(p-1)+(p-q)i=3+qi$

3 次の計算をせよ。↔ **例題3**

(1) $(4-i)+(-5+2i)$　　(2) $\left(\frac{4}{3}+\frac{5}{8}i\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}i\right)$

4 次の計算をせよ。↔ **例題4**

(1) $(1+2i)(3+4i)$　　(2) $(5-6i)^2$

5 次の計算をせよ。↔ **例題5**

(1) $\frac{4}{i}$　　(2) $\frac{4+i}{3+2i}$

6 次の数の平方根を求めよ。↔ **例題6-2**

(1) -45　　(2) -256

7 次の計算をせよ。↔ **例題7**

(1) $\sqrt{-5}\times\sqrt{-80}$　　(2) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{-6}}$　　(3) $(\sqrt{-1}+2)^2$

基本問題

1 $\alpha=(1+ki)+2(k-4i)$ について，次の問いに答えよ。ただし，k は実数とする。

(1) α の実部と虚部を k で表せ。

(2) α が実数となるような k の値を求めよ。

2 等式 $(5+4i)p-(2-7i)q=26-5i$ を満たす実数 p，q の値を求めよ。

3 次の計算をせよ。

(1) $i+i^2+i^3$

(2) $(2i-3)(5+3i)$

(3) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2$

(4) $(2+i)^3$

4 次の複素数αと共役な複素数$\overline{\alpha}$を答えよ。また，α と$\overline{\alpha}$の和，積をそれぞれ求めよ。

(1) $\alpha=1+4i$

(2) $\alpha=-\sqrt{7}\,i$

5 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{5i}{2+i}$

(2) $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

6 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt{-12}+\sqrt{-48}$

(2) $\sqrt{-45}\times\sqrt{-20}$

(3) $\dfrac{8}{\sqrt{-16}}$

(4) $(4-\sqrt{-18})^2$

7 $\dfrac{a+i}{2-i}$ が純虚数となるような実数 a の値を求めよ。

8 $(1-i)^8$ を計算せよ。

応　用　問　題

1 次の計算をせよ。

(1) $(\sqrt{3}+4i)(5-\sqrt{27}\,i)$

(2) $\dfrac{1+2i}{2-i}-\dfrac{2+i}{i^3}$

2 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt{-8}-2\sqrt{-18}+\dfrac{1}{\sqrt{-2}}$

(2) $(\sqrt{-6}+\sqrt{-2})^2$

3 等式 $(5+3i)^2-(2x-i)^2=y$ を満たす実数 x，y の値を求めよ。

4 x は実数とする。$p=\dfrac{3-i}{2+i}+\dfrac{x-i}{1-i}$ について，次の問いに答えよ。

(1) p が実数となる x の値を求めよ。また，そのときの p の値を求めよ。

(2) p が純虚数となる x の値を求めよ。また，そのときの p の値を求めよ。

5 $\alpha^2=i$ を満たす複素数 α を求めたい。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\alpha=a+bi$ (a，b は実数)とおいて，a，b についての連立方程式を作れ。

(2) 複素数 α を求めよ。