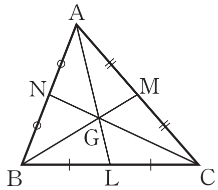
第1講　図形の性質(1)　三角形の性質

基　礎　学　習

1　三角形の重心

右図の△ABCで，3本の中線AL，BM，❶　　は1点Gで交わり，この点Gを三角形の❷　　という。



この点Gは，中線ALを❸　　：1に内分する。

すなわち

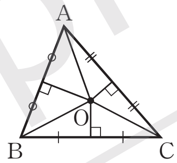
AG：GL＝❸　　：1

また，同様に，中線BM，❶　　を❸　　：1に内分する。

このように，三角形の3本の中線は1点で交わり，この交点は各中線を2：1に内分する。

2　三角形の外心

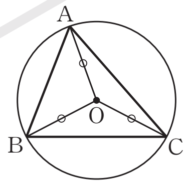
右図の△ABCで，3辺BC，CA，ABの垂直二等分線は，1点Oで交わる。



点Oは辺BCの垂直二等分線上にあるから

OB＝❹　　

同様に，OC＝OA，OA＝❺　　であるから，点Oは3頂点A，B，Cから等距離にある。

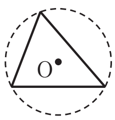


よって，点Oを中心として，3頂点A，B，Cを通る円をかくことができる。この3頂点を通る円を，三角形の❻　　といい，その中心Oを❼　　という。

このように，三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わり，この交点が三角形の❼　　である。

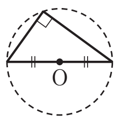
三角形の❼　　は，三角形の形状によって次のような位置にある。

(i)　鋭角三角形



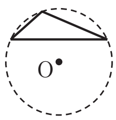
内部

(ii)　直角三角形



斜辺の中点

(iii)　鈍角三角形



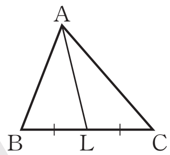
外部

---

point

中線

三角形の1つの頂点とそれに向かい合う辺の中点とを結ぶ線分。



↔ 内分と外分

m，nを正の実数とする。

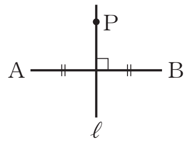
点Pが線分AB上にあって，AP：PB＝m：nが成り立つとき，点Pは線分ABをm：nに内分するという。

点Qが線分ABの延長上にあって，AQ：QB＝m：nが成り立つとき，点Qは線分ABをm：nに外分するという。

point

垂直二等分線

1つの線分の中点を通り，これに垂直な直線。



垂直二等分線ℓ上の点Pについて

PA＝PB

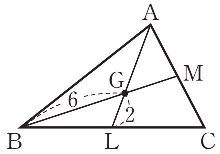
が成り立つ。

解答　❶ CN　❷ 重心　❸ 2　❹ OC　❺ OB　❻ 外接円　❼ 外心

例題1 ［三角形の重心］ ➡1

右図で，点Gは△ABCの重心である。GL＝2，BG＝6のとき，次の長さを求めよ。

(1) AG　　(2) BM



解答

(1) 点Gは△ABCの重心であるから，AG：GL＝ $\boxed{1}$ ： $\boxed{2}$ より

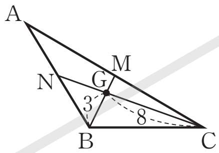
AG：2＝ $\boxed{1}$ ： $\boxed{2}$ 　よって，AG＝ $\boxed{3}$

(2) また，BG：BM＝2： $\boxed{4}$ より

6：BM＝2： $\boxed{4}$ 　よって，BM＝ $\boxed{5}$

類題1 右図で，点Gは△ABCの重心である。BG＝3，CG＝8のとき，次の長さを求めよ。

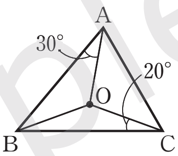
(1) GM　　(2) CN



例題2 ［三角形の外心］ ➡2

右図で，点Oは△ABCの外心である。∠OAB＝30°，∠OCB＝20°のとき，次の角の大きさを求めよ。

(1) ∠ABC　　(2) ∠OAC



解答

(1) 点Oは△ABCの外心であるから，OA＝OB＝ $\boxed{6}$ より，△OAB，△OBCは二等辺三角形である。

△OABにおいて，2つの底角は等しいから

∠OBA＝∠OAB＝ $\boxed{7}$ °

△OBCにおいて，同様に

∠OBC＝∠OCB＝ $\boxed{8}$ °

よって，∠ABC＝∠OBA＋∠OBC＝ $\boxed{9}$ °

(2) OA＝OCより，△OCAは二等辺三角形であるから

∠OCA＝∠ $\boxed{10}$

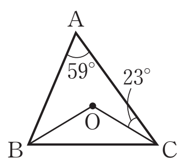
△ABCの内角の和は180°であるから

30°×2＋ $\boxed{11}$ °×2＋2∠OAC＝180°

よって，∠OAC＝ $\boxed{12}$ °

類題2 右図で，点Oは△ABCの外心である。∠BAC＝59°，∠OCA＝23°のとき，次の角の大きさを求めよ。

(1) ∠OBA　　(2) ∠OCB



ヒント

BG：GM＝2：1

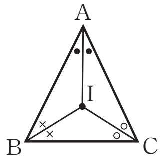
例題1の答	
1　2	2　1
3　4	4　3
5　9	

外心の性質

外心Oは，辺AB，BC，CAの垂直二等分線の交点であるから，3頂点A，B，Cから等距離にある。

例題2の答	
6　OC	7　30
8　20	9　50
10　OAC	11　20
12　40	

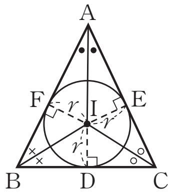
3 三角形の内心



右図の△ABCで，３つの内角∠A，∠B，∠Cの二等分線は１点Ｉで交わる。

点Ｉから３辺BC，CA，ABに垂線ID，IE，IFを下ろすと，△CID≡△ ❶ より，ID= ❷

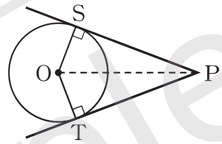
同様に，ID=IF であり，ID= ❷ =IF



よって，点Ｉを中心として，３点Ｄ，Ｅ，Ｆを通る円をかくことができる。この円は，△ABCの３辺に点Ｄ，Ｅ，Ｆで接している。この円を，三角形の ❸ といい，その中心Ｉを ❹ という。

このように，三角形の３つの内角の二等分線は１点で交わり，この交点が三角形の ❹ である。

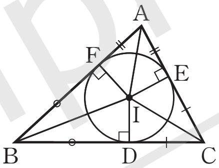
4 接線の長さと内接円



円Ｏの外部にある点Ｐから，円Ｏに接線PS，PTをひくと，△POS≡△POT より，

PS= ❺ となる。このPS， ❺ の長さをＰからの接線の長さという。

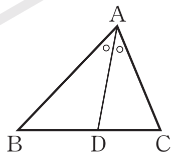
↔ △POSと△POTで
$$\begin{cases} OS=OT(=\text{半径}) \\ \angle PSO=\angle PTO \\ \qquad =90^\circ \\ PO\text{は共通} \end{cases}$$
ゆえに，△POS≡△POT



右図のように，円が△ABCに内接するとき，

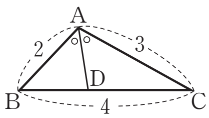
AF=AE，BD= ❻ ，CE= ❼ である。

5 角の二等分線と比



(1) △ABCにおいて，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をＤとすると，BD：DC=AB：ACが成り立つ。

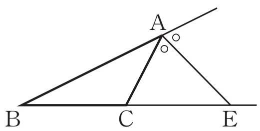
例 AB=2，BC=4，CA=3 の△ABCで，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をＤとすると



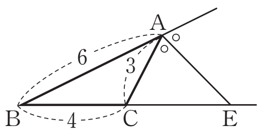
BD：DC=2： ❽ より，BD= ❾

↔ $BD=\frac{2}{2+3}\cdot BC$

(2) AB≠ACである△ABCの頂点Ａにおける外角の二等分線と辺BCの延長との交点をＥとすると，BE：EC=AB：ACが成り立つ。



例 AB=6，BC=4，CA=3 の△ABCで，頂点Ａの外角の二等分線と辺BCの延長との交点をＥとすると



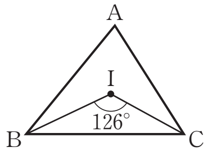
BE：EC= ❿ ：1 より，EC= ⓫

↔ BC：CE=1：1

解答 ❶ CIE　❷ IE　❸ 内接円　❹ 内心　❺ PT　❻ BF　❼ CD　❽ 3　❾ $\frac{8}{5}$　❿ 2　⓫ 4

例題3　[三角形の内心]　➡3

右図で，点 I は△ABCの内心である。
∠BIC＝126°のとき，∠BACの大きさを求めよ。



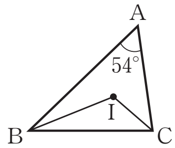
解答

△BICで，∠IBC＋∠ICB＝180°－$\boxed{1}$°＝$\boxed{2}$°

△ABCで，∠BAC＝180°－2(∠IBC＋∠$\boxed{3}$)

＝180°－2×$\boxed{2}$°＝$\boxed{4}$°

類題3　右図で，点 I は△ABCの内心である。
∠BAC＝54°のとき，∠BICの大きさを求めよ。

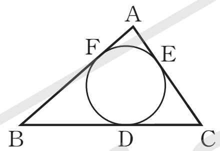


例題4　[接線の長さと内接円]　➡4

AB＝5，AC＝4 の△ABCに内接する円が 3 辺BC，CA，ABと接する点をD，E，Fとする。
AF＝x とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　線分BD，CDの長さを x で表せ。

(2)　BC＝6 のとき，線分AFの長さを求めよ。



解答

(1)　接線の性質より，BD＝$\boxed{5}$＝AB－$\boxed{6}$＝5－$\boxed{7}$

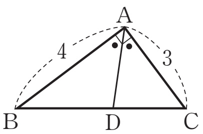
AE＝AFより，同様に，CD＝$\boxed{8}$＝AC－$\boxed{9}$＝4－$\boxed{10}$

(2)　(1)より，BC＝BD＋DC＝9－$\boxed{11}$＝6　よって，AF＝x＝$\boxed{12}$

類題4　AB＝6，AC＝5 の△ABCに内接する円が 3 辺BC，CA，ABと接する点をD，E，Fとする。AF＝2 のとき，BCの長さを求めよ。

例題5　[角の二等分線と比]　➡5

AB＝4，AC＝3，∠BAC＝90° の△ABCにおいて，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をDとするとき，線分CDの長さを求めよ。



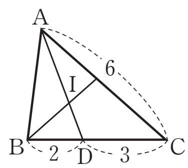
解答

三平方の定理により，BC＝$\sqrt{4^2+\boxed{13}}$＝$\boxed{14}$

線分ADは∠Aの二等分線であるから，BD：DC＝$\boxed{15}$：3

よって，CD＝$\dfrac{\boxed{16}}{\boxed{15}+3}$BC＝$\boxed{17}$×$\boxed{14}$＝$\boxed{18}$

類題5　右図の△ABCで，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をD，△ABCの内心を I とするとき，辺ABの長さと，AI：IDを求めよ。



ヒント

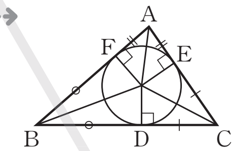
←→ 三角形の内角の和は180°

←→ ∠ABC＋∠ACB
＝2∠IBC＋2∠ICB

例題3の答

❶ 126　❷ 54
❸ ICB　❹ 72

←→



BD＝BF
CD＝CE
AE＝AF
が成り立つ。

例題4の答

❺ BF　❻ AF
❼ x　❽ CE
❾ AE (AFでも可)
❿ x　⓫ $2x$　⓬ $\frac{3}{2}$

←→ 内角の二等分線の性質より
BD：DC＝AB：AC

例題5の答

⓭ 3^2　⓮ 5　⓯ 4
⓰ 3　⓱ $\frac{3}{7}$　⓲ $\frac{15}{7}$

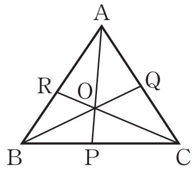
6 チェバの定理・メネラウスの定理

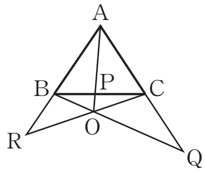
(1) チェバの定理

　△ABCとその辺上にない点Oにおいて，直線AO，BO，COが，辺BC，CA，ABと，それぞれ点P，Q，Rで交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\boxed{❶\quad}$$

　このチェバの定理は，右図のように，点Oが△ABCの外部にある場合にも成り立つ。





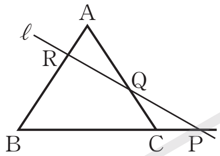
↔ **チェバの定理の公式**

　BP，PC，CQ，QA，AR，RBとしりとりするように左から書いていくと公式ができあがる。

(2) メネラウスの定理

　△ABCとその頂点を通らない直線ℓにおいて，直線ℓが△ABCの3辺BC，CA，ABまたはその延長と，それぞれ点P，Q，Rで交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\boxed{❷\quad}$$



↔ チェバの定理の公式と式の形は同じである。

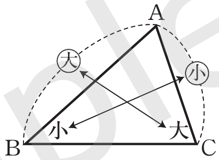
7 三角形の辺と角の大小

△ABCにおいて，AB>AC ⟺ ∠C>∠B

すなわち

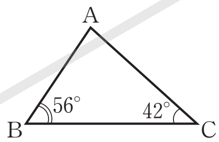
(1) 大きい辺に対する角は，小さい辺に対する角よりも $\boxed{❸\quad}$。

(2) 大きい角に対する辺は，小さい角に対する辺よりも $\boxed{❹\quad}$。



例　右図で，∠B=56°，∠C=42° のとき

AB $\boxed{❺\quad}$ AC が成り立つ。



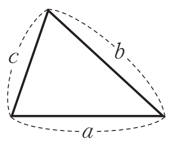
↔ ∠B>∠Cより，ACとABの大小関係を考える。

8 三角形の成立条件

　正の数 a，b，c を3辺の長さとする三角形が存在するための条件は

$$\begin{cases} a<b+c \\ b<c+a \quad \cdots\cdots ① \\ c<a+b \end{cases}$$

である。すなわち，三角形の2辺の長さの和は，残りの1辺の長さより $\boxed{❻\quad}$。



↔ ①の3つの式を1つの式にまとめると

$$|a-b|<c<a+b$$

　また，a，b，c の中で a が最大であれば，三角形が存在するための条件は，$a<b+c$ である。

例　長さ x，4，7の3つの線分を3辺とする三角形が存在する x の範囲は

$\boxed{❼\quad}<4+7$，$\boxed{❽\quad}<4+x$

より，$\boxed{❾\quad}<x<\boxed{❿\quad}$ である。

↔ $4<7$ と $x>0$ より

$4<x+7$

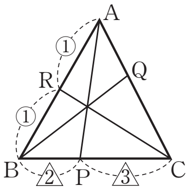
は成り立つので除いた。

解答　❶ 1　❷ 1　❸ 大きい　❹ 大きい　❺ <　❻ 大きい　❼ x　❽ 7　❾ 3　❿ 11

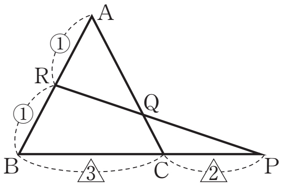
例題6　［チェバの定理・メネラウスの定理］　➡6

次の図で，AQ：QC を求めよ。

(1)



(2)



解答

(1)　チェバの定理より，$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　　$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{1}{1}=1$

よって，$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{3}{2}$ より，AQ：QC＝$\boxed{1}$：$\boxed{2}$

(2)　メネラウスの定理より，$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$　　$\dfrac{3+2}{2}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{1}{1}=1$

よって，$\dfrac{CQ}{QA}=\dfrac{2}{5}$ より，AQ：QC＝$\boxed{3}$：$\boxed{4}$

類題6　例題6と同じ点の配置で，次の比の関係が成り立つとき，AQ：QC を求めよ。

(1)　AR：RB＝3：2，BP：PC＝8：9

(2)　AR：RB＝3：5，BC：CP＝3：1

例題7　［三角形の辺と角の大小］　➡7

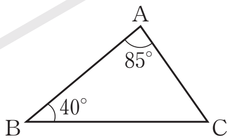
△ABC において，∠A＝85°，∠B＝40° のとき，3 辺 BC，CA，AB の大小関係を不等号を用いて表せ。

解答

$\angle C=180^\circ-(85^\circ+\boxed{5}^\circ)=\boxed{6}^\circ$

よって，∠$\boxed{7}$＜∠$\boxed{8}$＜∠A より

$\boxed{9}$＜$\boxed{10}$＜BC



類題7　△ABC において，BC＝6，CA＝$5\sqrt{2}$，AB＝3 のとき，3 つの内角の大小関係を不等号を用いて表せ。

例題8　［三角形の成立条件］　➡8

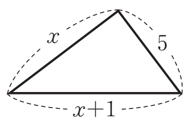
長さ x，$x+1$，5 の 3 つの線分を 3 辺とする三角形が存在する x の範囲を求めよ。

解答

辺の長さは正であるから，$x>0$，$x+1>0$ より，$x>0$ である。

三角形の成立条件より，$\boxed{11}<x+\boxed{12}$

よって，求める x の範囲は，$x>\boxed{13}$



類題8　長さ x，$2x+1$，7 の 3 つの線分を 3 辺とする三角形が存在する x の範囲を求めよ。

ヒント

⟷ チェバの定理，メネラウスの定理の公式に，与えられた値を代入する。

例題6の答

❶ 2　❷ 3　❸ 5
❹ 2

例題7の答

❺ 40　❻ 55　❼ B
❽ C　❾ CA
❿ AB

⟷ 三角形の成立条件の残り 2 つの不等式

$x<(x+1)+5$

$x+1<x+5$

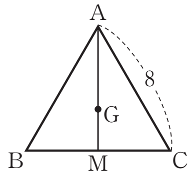
は，つねに成り立つ。

例題8の答

⓫ 5　⓬ $x+1$　⓭ 2

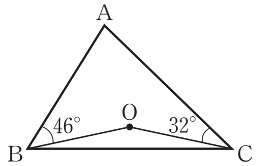
確認問題

1 右図で，点Gは正三角形ABCの重心であり，直線AGと辺BCとの交点をMとする。正三角形ABCの１辺の長さが８であるとき，BM，AGの長さを求めよ。↔ **例題1**

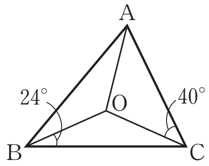


2 次の図で，点Oは△ABCの外心である。次の角の大きさを求めよ。↔ **例題2**

(1)　∠BAC

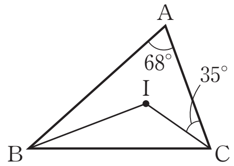


(2)　∠OAB

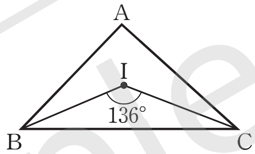


3 次の図で，点Ｉは△ABCの内心である。次の角の大きさを求めよ。↔ **例題3**

(1)　∠IBA



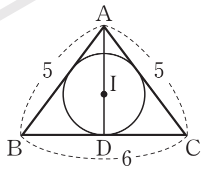
(2)　∠BAC



4 右図のように，３辺の長さが5，5，６の二等辺三角形ABCに円が内接している。点Ｉは二等辺三角形ABCの内心であり，直線AIと辺BCとの交点をＤとする。内接円の半径をrとおくとき，次の問いに答えよ。↔ **例題4**

(1)　線分AIの長さを，rを用いて２通りの表し方で表せ。

(2)　内接円の半径rを求めよ。

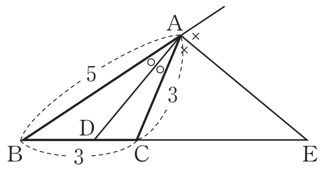


5 右図の△ABCで，∠Aの二等分線と辺BCとの交点をD，頂点Aの外角の二等分線と辺BCの延長との交点をEとするとき，次の問いに答えよ。

↔ **例題5**

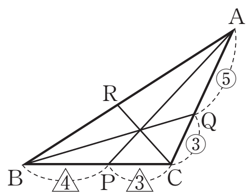
(1)　DCの長さを求めよ。

(2)　ECの長さを求めよ。

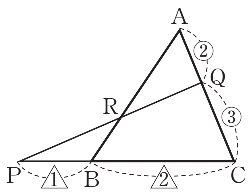


6 次の図で，AR：RBを求めよ。↔ **例題6**

(1)



(2)



7 △ABCにおいて，∠A＝38°，∠B＝72° のとき，３辺AB，BC，CAの大小関係を不等号を用いて表せ。

↔ **例題7**

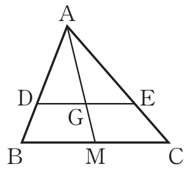
8 長さ$2x$，$x+3$，６の３つの線分を３辺とする三角形が存在するxの範囲を求めよ。↔ **例題8**

基　本　問　題

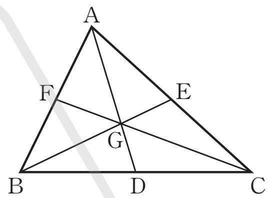
1　右図で，点Gは△ABCの重心である。直線AGと辺BCとの交点をM，Gを通り辺BCに平行な直線と２辺AB，ACとの交点をそれぞれD，Eとするとき，次の問いに答えよ。

⑴　AE：ECを求めよ。

⑵　BC＝12 のとき，GEの長さを求めよ。



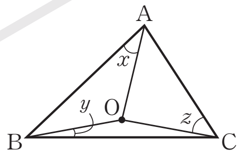
2　右図で，点Gは△ABCの重心であり，３辺BC，CA，ABの中点をそれぞれD，E，Fとするとき，△DEFの重心もGであることを示せ。



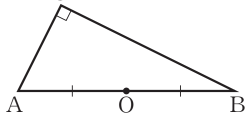
3　右図で，点Oは△ABCの外心である。

$\angle \mathrm{OAB}=x$，$\angle \mathrm{OBC}=y$，$\angle \mathrm{OCA}=z$

とするとき，$x+y+z$ の値を求めよ。



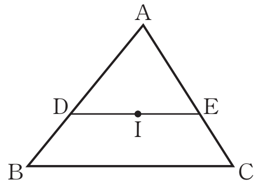
4　∠C＝90°の直角三角形ABCにおいて，辺ABの中点をOとするとき，Oが△ABCの外心であることを示せ。



5　△ABCの内心Ｉを通り辺BCに平行な直線と２辺AB，ACとの交点をそれぞれD，Eとするとき

DE＝BD＋CE

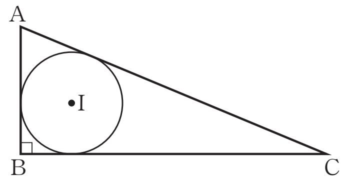
であることを示せ。



6 ∠ABC＝90°の直角三角形ABCにおいて

AB＝5，BC＝12

のとき，△ABCの内接円の半径を求めよ。
ただし，内心をＩとする。

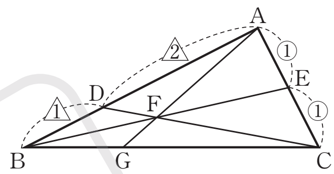


7 右図の△ABCにおいて，辺ABを2：1に内分する点をD，辺ACを1：1に内分する点をE，CDとBEとの交点をF，AFの延長と辺BCとの交点をGとする。

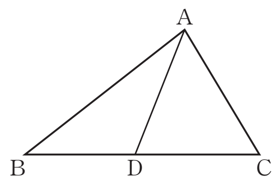
(1) BG：GCを求めよ。

(2) BF：FEを求めよ。

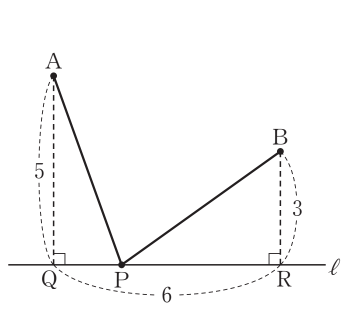
(3) 面積比 △FGC：△ABCを求めよ。



8 △ABCにおいて，AB＞AC ならば，辺BC上の点Dについて AD＜AB であることを示せ。



9 右図において，直線 ℓ に関して同じ側に点A，Bがあり，直線 ℓ 上に点Pがある。AQ＝5，BR＝3，QR＝6 のとき，AP＋PB の最小値を求めよ。

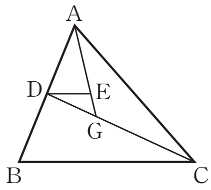


応　用　問　題

1 △ABCの重心をGとする。直線CGと辺ABとの交点をD，Dを通って辺BCに平行な直線と線分AGとの交点をEとするとき，次の問いに答えよ。

(1) AE：EGを求めよ。

(2) 面積比△ABC：△DEGを求めよ。



2 外心と内心が一致する三角形は正三角形であることを示せ。

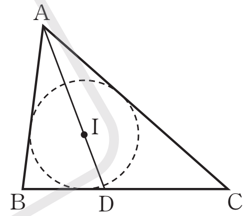
3 △ABCの内心をＩとする。

AB=4，BC=5，CA=6

であり，直線AIと辺BCとの交点をDとするとき，次の問いに答えよ。

(1) BDの長さを求めよ。

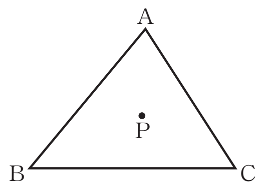
(2) 面積比 △ABC：△BID を求めよ。



4 △ABCの内部に点Pをとるとき

$$PA+PB+PC>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$$

が成り立つことを示せ。



5 右図の△ABCにおいて，辺ABを3：5に内分する点をD，辺ACを3：2に内分する点をE，DEの延長とBCの延長との交点をF，BEの延長とAFの交点をGとする。このとき，AG：GFを求めよ。