高校新演習 数学A

目 次

STANDARD

第1講 >>> 場合の数

基礎学習

1 和集合の要素の個数

集合Mの要素の個数が有限であるとき，Mの要素の個数を$n(M)$で表す。

例 $M=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ のとき，$n(M)=4$ である。

A，Bが有限集合のとき，$A\cup B$ の要素の個数 $n(A\cup B)$ を考えてみよう。

(1) $A\cap B=\phi$ のとき

AとBには共通の要素がないから

$n(A\cup B)=n(A)+$ ❶ ……Ⓐ

(2) $A\cap B\neq$ ❷ のとき

$A\cap B$ の部分は重複して数えることになるから

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-$ ❸ ……Ⓑ

$A\cap B=\phi$ のとき，$n(A\cap B)=$ ❹ であるから，Ⓐ，Ⓑをまとめると

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-$ ❸ である。

例 20以下の正の整数のうち，2の倍数の集合をA，3の倍数の集合をBとすると，$n(A)=10$，$n(B)=6$ であり，$A\cap B=\{6,\ 12,\ 18\}$ であるから

$n(A\cup B)=10+6-$ ❺ $=$ ❻

である。

2 補集合の要素の個数

全体集合Uに対して，Uの部分集合Aと補集合$\overline{A}$の間には

$A\cup\overline{A}=$ ❼，$A\cap\overline{A}=$ ❽

が成り立つから

$n(A\cup\overline{A})=n(A)+n(\overline{A})=$ ❾

である。

したがって，$n(\overline{A})=$ ❾ $-n(A)$ である。

例 50以下の正の整数を全体集合Uとして，そのうちの6の倍数の集合をAとすると，$A=\{6\times1,\ 6\times2,\ 6\times3,\ \cdots,\ 6\times8\}$ より，$n(A)=$ ❿ である。

したがって，6で割り切れない数の集合は$\overline{A}$で

$n(\overline{A})=50-$ ❿ $=$ ⓫

である。

集合の要素の個数
集合A，Bについて
$n(A\cup B)$
$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
とくに，$A\cap B=\phi$ のとき
$n(A\cup B)$
$=n(A)+n(B)$

point
重要公式
$n(A\cup B)$
$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$20\div2=10$ より
$n(A)=10$
$20\div3=6.\cdots$ より
$n(B)=6$

point
重要公式
$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

解答 ❶ $n(B)$　❷ ϕ　❸ $n(A\cap B)$　❹ 0　❺ 3　❻ 13　❼ U　❽ ϕ　❾ $n(U)$　❿ 8　⓫ 42

例題1

2つの集合$A=\{x\mid x$は1けたの正の整数$\}$，$B=\{x\mid x$は50以下の正の偶数$\}$について，$n(A\cup B)$を求めよ。

解答

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$

$B=\{2\times1,\ 2\times2,\ 2\times3,\ 2\times4,\ \cdots,\ 2\times\boxed{1},\ 2\times\boxed{2}\}$

$A\cap B=\{2\times1,\ 2\times2,\ 2\times3,\ 2\times4\}$

であるから，$n(A)=9$，$n(B)=\boxed{3}$，$n(A\cap B)=4$

したがって，$n(A\cup B)=9+\boxed{3}-4=\boxed{4}$

である。

類題1　2つの集合$A=\{x\mid x$は30以下の正の3の倍数$\}$，$B=\{x\mid x$は100以下の正の5の倍数$\}$について，$n(A\cup B)$を求めよ。

例題2

100以下の正の整数のうち，3でも4でも割り切れないものはいくつあるか。

解答

3の倍数の集合をA，4の倍数の集合をBとすると，$A\cap B$は$\boxed{5}$の倍数の集合である。

$A=\{3\times1,\ 3\times2,\ 3\times3,\ \cdots,\ 3\times32,\ 3\times33\}$

$B=\{4\times1,\ 4\times2,\ 4\times3,\ \cdots,\ 4\times\boxed{6},\ 4\times\boxed{7}\}$

$A\cap B=\{\boxed{5}\times1,\ \boxed{5}\times2,\ \boxed{5}\times3,\ \cdots,\ \boxed{5}\times\boxed{8}\}$

であるから，$n(A)=33$，$n(B)=\boxed{7}$，$n(A\cap B)=\boxed{8}$

したがって，求める個数は$n(\overline{A\cup B})$で表されるから

$n(A\cup B)=33+\boxed{7}-\boxed{8}=\boxed{9}$より，

$n(\overline{A\cup B})=n(U)-\boxed{9}$

$=\boxed{10}$

である。

類題2　100以下の正の整数のうち，14で割り切れないものはいくつあるか。

ヒント

$n(A\cup B)$
$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
を用いる。

例題1の答

1　24　2　25　3　25
4　30

$n(A\cup B)$
$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
を用いる。

例題2の答

5　12　6　24　7　25
8　8　9　50　10　50

3 辞書式の順序による数えあげ

場合の数を数えるときに，条件を満たすものをすべて書き並べる方法がある。

その際に，思いついたものを次々に書いていくと，同じものを 2 度書いたり，数え落としたりということになりかねない。そこで，何らかの規準にしたがって規則正しく書き並べていくことが必要となる。

このような目的のために，辞書式の配列というものがよく用いられる。

例　a，b，c の 3 文字から作られる文字列を辞書式の順序ですべて書き並べると

abc，❶　，❷　，bca，❸　，cba

の❹　通りあることがわかる。

（注）このように数えあげる方法は，場合の数がそれほど多くないときはよいが，数が多くなってくると対応しきれなくなる。実際には第 2 講で学ぶ順列の考え方を用いる方がよい。

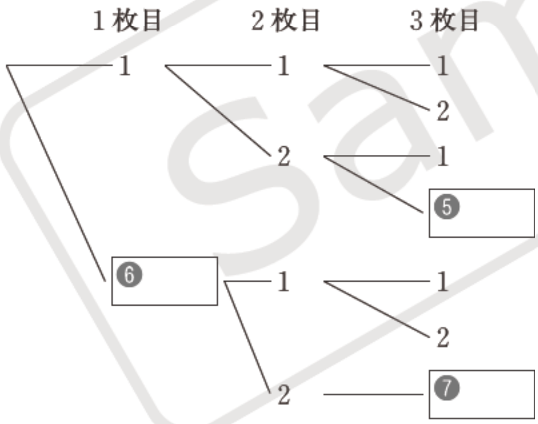
場合の数
あることがらにおいて，起こりうるすべての場合を数えあげるとき，その総数をいう。

数えあげの原則
条件を満たすものをすべて書き並べようとするとき
・もれがないこと
・重複がないこと
の両方が満たされていなければならない。

4 樹形図

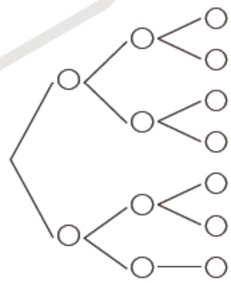
規則正しい数えあげのために，次々に枝分かれをしていく，樹形図とよばれる図を書いて考える方法が有効である。

例　1 と書いたカードが 3 枚と 2 と書いたカードが 2 枚の，合計 5 枚のカードがある。これらのうちの 3 枚を取り出して並べるときの並べ方の総数は，次のような樹形図を書いて調べることができる。



求める並べ方の総数は❽　通りである。

樹形図のスタイル
左の例のような書き方のほかに，次のようなスタイルもある。



解答　❶ acb　❷ bac　❸ cab　❹ 6　❺ 2　❻ 2　❼ 1　❽ 7

例題3

1，2，3，4 の 4 個の数字のうちの，異なる 3 個を使って作られる 3 けたの自然数は全部でいくつあるかを，小さい数から順にすべて書き並べることによって調べよ。

解答

123，　124，　[1]，134，　[2]，143，

213，　[3]，[4]，234，　[5]，243，

[6]，314，　321，　[7]，341，　[8]，

412，　[9]，421，　423，　[10]，[11]

以上の [12] 個。

類題3　0，1，2，3 の 4 個の数字のうちの，異なる 3 個を使って作られる 3 けたの自然数は全部でいくつあるかを，小さい数から順にすべてを書き並べることによって調べよ。

例題4

百円硬貨が 3 枚，五十円硬貨が 4 枚，十円硬貨が10枚ある。これらを用いて300円を支払う方法が何通りあるかを，百円硬貨，五十円硬貨，十円硬貨の順に注目して，それぞれを何枚使うかを表した樹形図を書くことによって求めよ。

解答

百円硬貨の枚数	五十円硬貨の枚数	十円硬貨の枚数
3	0	0
2	[13]	0
	1	[14]
	0	10
1	[15]	0
	[16]	[17]
	[18]	[19]
0	[20]	[21]

ゆえに，支払い方は全部で，[22] 通り。

類題4　百円硬貨が 3 枚，五十円硬貨が 6 枚，十円硬貨が10枚ある。これらを用いて300円を支払う方法は何通りあるか。樹形図を書くことによって求めよ。

ヒント

大きさの順の羅列

まず百の位が 1 のものをあげる。

その中では，十の位が 2 のものから先に書く。

例題3の答

1	132	2	142
3	214	4	231
5	241	6	312
7	324	8	342
9	413	10	431
11	432	12	24

樹形図も規則正しく

各硬貨をそれぞれ何枚まで使えるかを考え，硬貨の額の大きさの順に書いていく。

左図と違って，枚数を小さい数から先に書くのもよい。

いずれにしても，一定の規準にしたがって規則正しく書き並べることが大切である。

例題4の答

13	2	14	5	15	4
16	3	17	5	18	2
19	10	20	4	21	10
22	8				

5 和の法則

2つのことがらA，Bについて，Aの起こり方がm通り，Bの起こり方がn通りであり，AとBが同時に起こることはないとするとき，AまたはBの起こり方は［❶　］通りである。

例　大小2個のさいころを投げるとき，目の和が5の倍数となるのは何通りあるかを求める。

2個のさいころの目の和の中で，5の倍数は5と［❷　］の2通りがある。

大のさいころの目がa，小のさいころの目がbであることを(a, b)のように表すと

目の和が5であるのは，(1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1)の4通り。

目の和が［❷　］であるのは，［❸　］，［❹　］，［❺　］の3通り。

したがって，目の和が5の倍数となるのは［❻　］通りである。

和の法則の意味

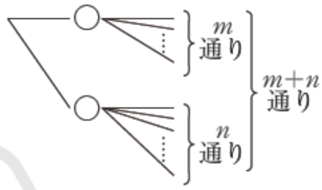
数えたいことがらが，何らかの基準によって分類できるときは，分類して数えよということ。

分類の原則は

・もれなく

・重複なく

の両方が満たされること。



6 積の法則

2つのことがらA，Bについて，Aの起こり方がm通り，そのおのおのに対してBの起こり方がn通りのとき，Aでの起こり方とBでの起こり方を組にして考えたことがらの起こり方は［❼　］通りである。

積の法則があてはまる場合は，「AとBがともに起こる」と表現されることもよくある。

例　大小2個のさいころを投げるとき，大のさいころでは偶数の目が，小のさいころでは3の倍数の目が出るのは

［❽　］×［❾　］＝［❿　］（通り）

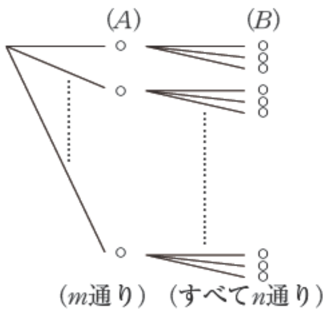
例　右図のように，AからBへは4本の道が，BからCへは3本の道がある。

このとき，Bを通ってAからCへ行く行き方の数は

［⓫　］×［⓬　］＝［⓭　］（通り）

積の法則の意味

ことがらAでのm通りの起こり方のそれぞれに対し，ことがらBでの起こり方がすべてn通りなら，樹形図の枝分かれはmn本になる。



解答　❶ $m+n$　❷ 10　❸ (4，6)　❹ (5，5)　❺ (6，4)(❸～❺は順不同)　❻ 7　❼ mn　❽ 3　❾ 2　❿ 6　⓫ 4　⓬ 3　⓭ 12

例題5

大小2個のさいころを投げるとき，目の和が10の約数となるのは何通りあるか。

解答

2個のさいころの目の和として現れる数のうち，10の約数は小さいほうから

1 [　　], 2 [　　], 3 [　　] の3種類の場合がある。

和が 1 [　　] であるのは，4 [　　] 通り

2 [　　] であるのは，5 [　　] 通り

3 [　　] であるのは，6 [　　] 通り

であるから，目の和が10の約数となるのは全部で 7 [　　] 通りである。

類題5　大小2個のさいころを投げるとき，目の和が16の約数となるのは何通りあるか。

例題6

$(a+b+c)(d+e+f+g)$ を展開するとき，いくつの項が現れるか。

解答

a，b，c のうちの1つと，d，e，f，g のうちの1つとの積が現れる項のすべてであり，同類項が現れることはないから，項の数は

8 [　　] × 9 [　　] ＝ 10 [　　]（個）

類題6　$(a+b)(c+d+e+f+g)$ を展開するとき，いくつの項が現れるか。

例題7

72の正の約数は全部でいくつあるか。

解答

72を素因数分解すると，$72=2^{\boxed{11}}\cdot 3^{\boxed{12}}$ となる。

したがって，72の正の約数は，$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)$ を展開したときに，すべてのものが1回ずつ現れるから，全部で

13 [　　] × 14 [　　] ＝ 15 [　　]（個）

類題7　96の正の約数は全部でいくつあるか。

ヒント

約数

10の約数は1，2，5，10があるが，このうち1はさいころ2個の目の和とはなれない。

例題5の答

1 2　2 5　3 10
4 1　5 4　6 3
7 8

展開の基本

（　）（　）の形の式の展開は，それぞれの（　）内から1つずつ取った積の和を作る。

例題6の答

8 3　9 4　10 12

素因数分解

72の素因数分解は，右のような形式で次々に素数で割っていくことによって求める。

2) 72
2) 36
2) 18
3) 9
　 3

例題7の答

11 3　12 2　13 4
14 3　15 12

確認問題演習

1 100以下の自然数のうち，次のような数の個数を求めよ。⇔ 例題1，例題2

(1) 6の倍数

(2) 8の倍数

(3) 6または8で割り切れる数

(4) 6でも8でも割り切れない数

2 1，2，3，4の4個の数字のうちの，異なる3個を使って作られる3けたの自然数のうち偶数はいくつできるか。一の位に注目して小さい数から順にすべて書き並べることによって調べよ。⇔ 例題3

3 百円硬貨が2枚，五十円硬貨が6枚，十円硬貨が20枚ある。これらを用いて300円を支払う方法は何通りあるか。樹形図を書くことによって求めよ。⇔ 例題4

4 大小2個のさいころを投げるとき，目の和が4の倍数となるのは何通りあるか。⇔ 例題5

5 $(a+b+c+d+e)(f+g)$ を展開するとき，いくつの項が現れるか。⇔ 例題6

6 200の正の約数は全部でいくつあるか。⇔ 例題7

基　本　問　題　演　習

1　1，2，3 の 3 種類の数字だけを使って作られる 3 けたの整数は全部でいくつあるか。小さい数から順にすべてを書き並べることによって求めよ。
　ただし，同じ数字を 2 回以上使ってもよいし，使われない数字があってもよいものとする。

2　$(a+b+c+d)(x+y+z)$ を展開するとき，いくつの項が現れるか。

3 コインを何回か投げ，表が3回出るか，裏が3回出たところでやめるとすると，表裏の出方は何通りあるか。

4 a，b がそれぞれ1から6までの整数である x についての2次方程式 $x^2-ax+b=0$ において，$x=2$ が解であるものはいくつあるか。

5 全体集合 U とその部分集合 A，B について，$n(U)=100$，$n(A)=45$，$n(B)=60$ のとき，$n(A\cap B)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

応用問題演習

1 A，B，C，Dと書かれたカードが1枚ずつあり，この順に並べられている。これらのカードを並べかえて，どのカードも最初と異なる位置にくるような並べ方は何通りあるか。樹形図を書いて調べよ。

2 千円札，五百円硬貨，百円硬貨を何枚用いてもよいとき，3000円を支払う方法は何通りあるか。

3 りんごが3個，みかんと柿が4個ずつある。これらのうちから4個を取り出す方法は何通りあるか。

4 右図のような地図を，隣り合う部分が同じ色にならないようにして，赤，青，黄，緑の4色で塗り分ける方法は何通りあるか。
ただし，使わない色があってもよいものとする。