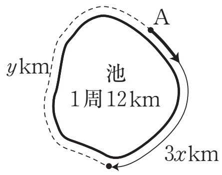
第7講　2次関数(1)　2次関数とグラフ

基　礎　学　習

1　関数に関することば



右の図のように，周囲12kmの池のまわりを時速3kmで歩き1周する。A地点を出発してからx時間後の進んだ道のりは ❶ kmであり，残りの道のりを$y$kmとすると，$y=12-$ ❶ である。このとき，$0 \leqq x \leqq 4$ の範囲で，xの値を定めると，対応するyの値がただ1つ定まる。

このように，2つの変数x，yがあり，xの値を定めると，対応するyの値がただ1つ定まるとき，yはxの ❷ であるといい，$y=f(x)$ のように表す。

$y=f(x)$において，$x=a$のときのyの値を ❸ と表し，この値を$x=a$における関数の値という。

⟷ 時速3kmで，12kmの池を1周するので，かかる時間は4時間である。
よって，$0 \leqq x \leqq 4$

2　関数のグラフ

平面上で座標軸を定めた平面を ❹ といい， ❹ 上の点を実数の組$(a,\ b)$で表したものを座標という。

関数$y=f(x)$に対し，等式$y=f(x)$を満たす点$(x,\ y)$全体が作る図形を，関数$y=f(x)$のグラフといい，$y=f(x)$をそのグラフの方程式という。

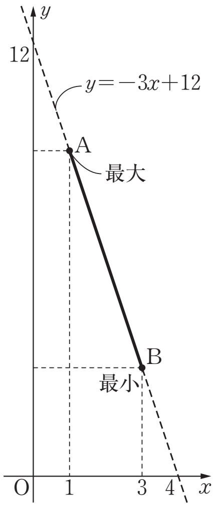
関数$y=f(x)$において，xのとりうる値の範囲を，この関数の ❺ といい，このxの範囲におけるyのとりうる値の範囲を ❻ という。

関数$y=f(x)$の ❺ が$a \leqq x \leqq b$であることを，$y=f(x)$　$(a \leqq x \leqq b)$のように書くことが多い。

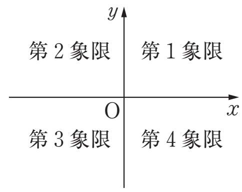
❻ に最大の値があるとき，この値を ❼ といい， ❻ に最小の値があるとき，この値を ❽ という。

例えば，関数$y=-3x+12$　$(1 \leqq x \leqq 3)$ のグラフは右の図のようになり，定義域は ❾ ，値域は ❿ である。

また，$x=$ ⓫ のとき最大値 ⓬
　　　$x=$ ⓭ のとき最小値 ⓮
をとる。



⟷ 座標平面は座標軸により，次のような4つの部分(象限(しょうげん))に分けられる。



なお，座標軸上の点は，どの象限にも属さないものとする。

例　点$(-2,\ 5)$は第2象限にあり，点$(0,\ -3)$はどの象限にも属さない。

解答　❶ $3x$　❷ 関数　❸ $f(a)$　❹ 座標平面　❺ 定義域　❻ 値域　❼ 最大値
❽ 最小値　❾ $1 \leqq x \leqq 3$　❿ $3 \leqq y \leqq 9$　⓫ 1　⓬ 9　⓭ 3　⓮ 3

例題 1 ［関数の値］ ➡1

次の関数 $f(x)$ について，$f(0)$，$f(5)$，$f(-3)$，$f(a-1)$ の値を，それぞれ求めよ。

(1) $f(x)=2x-5$ (2) $f(x)=x^2+4$

解答

(1) $f(0)=2\cdot 0-5=\boxed{1}$ $f(5)=2\cdot 5-5=\boxed{2}$

$f(-3)=2\cdot(-3)-5=\boxed{3}$

$f(a-1)=2\cdot(a-1)-5=\boxed{4}$

(2) $f(0)=0^2+4=\boxed{5}$ $f(5)=5^2+4=\boxed{6}$

$f(-3)=(-3)^2+4=\boxed{7}$

$f(a-1)=(a-1)^2+4=(a^2-2a+1)+4=\boxed{8}$

類題 1 次の関数 $f(x)$ について，$f(3)$，$f(-2)$，$f(a+2)$ の値を，それぞれ求めよ。

(1) $f(x)=-3x+7$ (2) $f(x)=2x^2+x$

例題 2 ［関数のグラフ］ ➡2

次の関数の値域を求めよ。また，最大値，最小値があれば，それを求めよ。

$y=2x-1$ $(-1\leqq x<3)$

解答

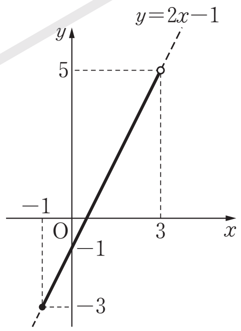
与えられた関数のグラフは，直線 $y=2x-1$ の $-1\leqq x<3$ の部分である。

$y=2x-1$ において，$x=-1$ のとき

$y=2\cdot(-1)-1=\boxed{9}$

$x=3$ のとき

$y=2\cdot 3-1=\boxed{10}$



よって，与えられた関数のグラフは図の実線部分である。値域は

$\boxed{11}\leqq y<\boxed{12}$

また，最大値，最小値について

最大値はない $x=-1$ のとき最小値 $\boxed{13}$

（注） グラフで，端点を含む場合は●，含まない場合は○で表す。

類題 2 次の関数の値域を求めよ。また，最大値，最小値があれば，それを求めよ。

$y=-2x+3$ $(-2<x\leqq 3)$

ヒント

↔ $f(x)$ の x には，数の他に $a-1$ のような式を代入してもよい。

例題 1 の答

1 -5 2 5
3 -11 4 $2a-7$
5 4 6 29 7 13
8 a^2-2a+5

↔ **$y=2x-1$ のグラフ**

1 次関数 $y=2x-1$ のグラフのことを，直線 $y=2x-1$ という。

↔ **関数の最大値・最小値**

最大値，最小値は，どちらか片方または両方ともない場合がある。

↔ 最大値，最小値を答える際は，なるべくそのときの x の値も示す。

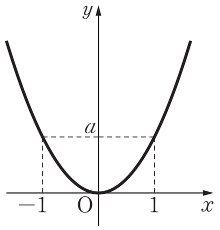
例題 2 の答

9 -3 10 5
11 -3 12 5
13 -3

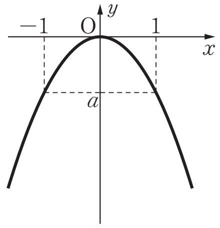
$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ のように，y が x の 2 次式で表されるとき，y は x の 2 次関数であるという。以下，第11講まで，$a\neq 0$ とする。

3　$y=ax^2$ のグラフ

$a>0$ のとき



$a<0$ のとき



(1)　軸：y 軸(直線 $x=0$)

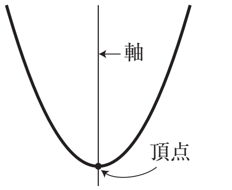
(2)　頂点：❶ ＿＿＿＿

(3)　グラフの形

$a>0$ のとき，下に凸(とつ)
$a<0$ のとき，上に凸

(参考)　グラフは，2 点$(1,\ a)$，$(-1,\ a)$を通る。

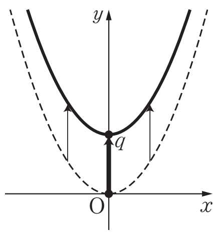
2 次関数のグラフ
2 次関数のグラフは放物線であり，軸と頂点がある。



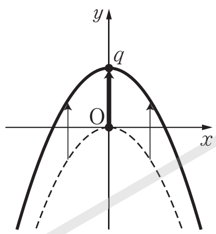
$y=ax^2+bx+c$ で
$a>0 \Longleftrightarrow$ 下に凸
$a<0 \Longleftrightarrow$ 上に凸

4　$y=ax^2+q$ のグラフ

$a>0$ のとき



$a<0$ のとき



○ $y=ax^2$ のグラフを y 軸方向に q だけ平行移動したグラフ

(1)　軸：y 軸(直線 $x=0$)

(2)　頂点：❷ ＿＿＿＿

(3)　グラフの形

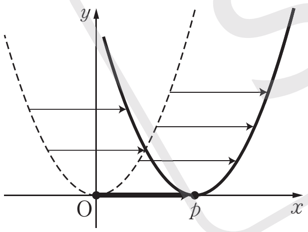
$a>0$ のとき，❸ ＿＿ に凸
$a<0$ のとき，❹ ＿＿ に凸

$y=ax^2$ のグラフが基本となる。

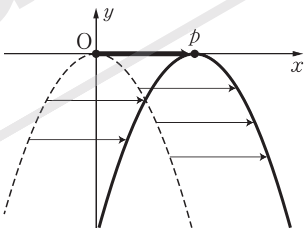
平行移動
平面上で，図形を形を変えずに一定の向きに一定の距離だけ動かすことを平行移動という。

5　$y=a(x-p)^2$ のグラフ

$a>0$ のとき



$a<0$ のとき



○ $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p だけ平行移動したグラフ

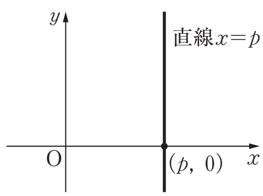
(1)　軸：❺ ＿＿＿＿

(2)　頂点：❻ ＿＿＿＿

(3)　グラフの形

$a>0$ のとき，❼ ＿＿ に凸
$a<0$ のとき，❽ ＿＿ に凸

点$(p,\ 0)$を通り y 軸に平行な直線を
直線 $x=p$
という。



解答　❶ 原点(点$(0,\ 0)$)　❷ 点$(0,\ q)$　❸ 下　❹ 上　❺ 直線 $x=p$　❻ 点$(p,\ 0)$　❼ 下　❽ 上

例題3　［$y=ax^2$ のグラフ］　➡3

次の 2 次関数のグラフの特徴を答えよ。

(1)　$y=2x^2$　　　(2)　$y=-\frac{1}{2}x^2$

解答

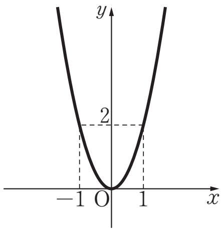
(1)　軸は［1］，頂点は［2］

［3］に凸の放物線で，2 点$(1,$ ［4］$)$，$(-1,$ ［4］$)$を通る。

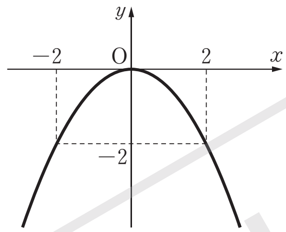
(2)　軸は［5］，頂点は［6］

［7］に凸の放物線で，2 点$(2,$ ［8］$)$，$(-2,$ ［8］$)$を通る。

(1)



(2)



類題3　次の 2 次関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\frac{2}{3}x^2$　　　(2)　$y=-3x^2$

例題4　［$y=ax^2+q$，$y=a(x-p)^2$ のグラフ］　➡4，5

次の 2 次関数のグラフの特徴を答えよ。

(1)　$y=-x^2+3$　　　(2)　$y=\frac{1}{3}(x-3)^2$

解答

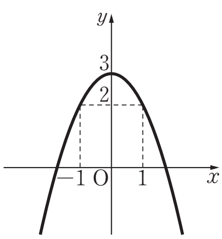
(1)　$y=-x^2$ のグラフを［9］軸方向に［10］だけ平行移動したもので

軸は［11］，頂点は［12］

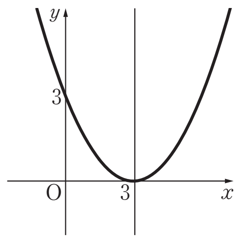
(2)　$y=\frac{1}{3}x^2$ のグラフを［13］軸方向に［14］だけ平行移動したもので

軸は［15］，頂点は［16］

(1)



(2)



(参考)　(2)では，$x=0$ のとき，$y=3$ である。このように，グラフと y 軸の交点の y 座標がかけるときは，なるべくかいておくとよい。

類題4　次の 2 次関数のグラフをかけ。

(1)　$y=2x^2-4$　　　(2)　$y=-(x+2)^2$

ヒント

$y=ax^2$ のグラフ

軸：y 軸(直線 $x=0$)
頂点：原点(点$(0,\ 0)$)

$a>0$ のとき，下に凸
$a<0$ のとき，上に凸

放物線をかくときには，頂点に加えて少なくとももう 1 点の座標も示す。

例題3の答

1　y 軸(直線 $x=0$)
2　原点(点$(0,\ 0)$)
3　下　4　2
5　y 軸(直線 $x=0$)
6　原点(点$(0,\ 0)$)
7　上　8　-2

$y=ax^2+q$ のグラフ
↑ y 軸方向に q だけ平行移動
$y=ax^2$ のグラフ

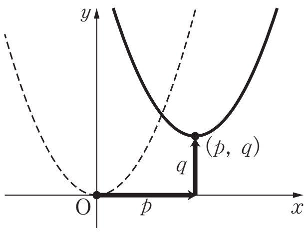
$y=a(x-p)^2$ のグラフ
↑ x 軸方向に p だけ平行移動
$y=ax^2$ のグラフ
(p の符号に注意する。)

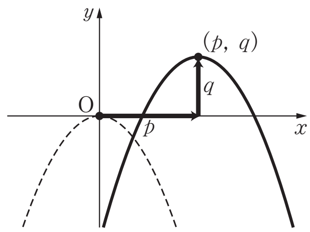
例題4の答

9　y　10　3
11　y 軸(直線 $x=0$)
12　点$(0,\ 3)$　13　x
14　3　15　直線 $x=3$
16　点$(3,\ 0)$

6 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

$a>0$ のとき　　　　　　　　　　$a<0$ のとき





$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したもので

(1)　軸：❶

(2)　頂点：❷

(3)　グラフの形　$\begin{cases} a>0 \text{ のとき，} ❸ \text{ に凸} \\ a<0 \text{ のとき，} ❹ \text{ に凸} \end{cases}$

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ
↑ y 軸方向に q だけ平行移動
$y=a(x-p)^2$ のグラフ
↑ x 軸方向に p だけ平行移動
$y=ax^2$ のグラフ

7 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

$y=ax^2+bx+c$ を変形すると，$y=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

となるので，$y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを

x 軸方向に $-\dfrac{b}{2a}$，y 軸方向に $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

だけ平行移動したもので

軸：❺　　，頂点：❻

例　$y=-2x^2+4x+1$ のグラフについて

$y=-2(x^2-2x)+1$

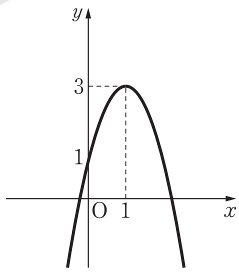
$=-2\left\{(x-❼)^2-❼^2\right\}+1$

$=-2(x-1)^2+3$

よって，グラフは，$y=-2x^2$ のグラフを

x 軸方向に ❽，y 軸方向に ❾

だけ平行移動したグラフである。



$y=ax^2+bx+c$

$=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x\right)+c$

$=a\left\{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right\}+c$

$=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}+c$

$=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

（この変形を平方完成という）

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを，単に

放物線 $y=ax^2+bx+c$

と呼ぶこともある。

8 $y=ax^2+bx+c$ のグラフの平行移動

一般に，x^2 の係数が等しい 2 つの放物線は合同であるので，平行移動することにより，重ね合わせることができる。

平行移動を考えるときは，平方完成して，頂点がどう動くかを調べればよい。

頂点が重なれば，放物線上の他の点も重なる。

解答　❶ 直線 $x=p$　❷ 点 $(p,\ q)$　❸ 下　❹ 上　❺ 直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$

❻ 点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$　❼ 1　❽ 1　❾ 3

例題5　［$y=ax^2+bx+c$ のグラフ］ ➡7

次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=x^2+4x+5$　　　(2)　$y=-2x^2+12x-14$

解答

(1)　$y=x^2+4x+5=(x+2)^2-2^2+5=(x+2)^2+1$

よって，グラフは $y=x^2$ のグラフを平行移動したもので

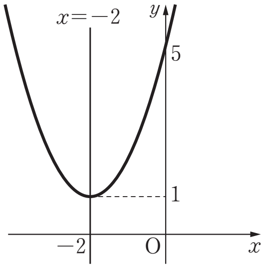
軸は $\boxed{1}$，頂点は $\boxed{2}$

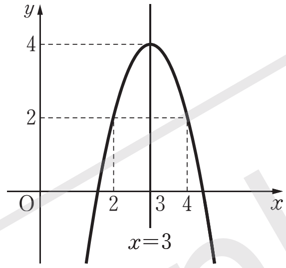
(2)　$y=-2x^2+12x-14=-2(x^2-6x)-14$

$=-2\{(x-3)^2-3^2\}-14=-2(x-3)^2+4$

よって，グラフは $y=-2x^2$ のグラフを平行移動したもので

軸は $\boxed{3}$，頂点は $\boxed{4}$

(1)


(2)


類題5　次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y=2x^2-8x+11$　　　(2)　$y=-x^2-8x-14$

例題6　［グラフの平行移動］ ➡8

放物線 $y=x^2+2x$ は，平行移動して放物線 $y=x^2-8x+17$ に重ねることができる。どのように平行移動すればよいか。

解答

$y=x^2+2x=(x+1)^2-1$

より，放物線 $y=x^2+2x$ の頂点は

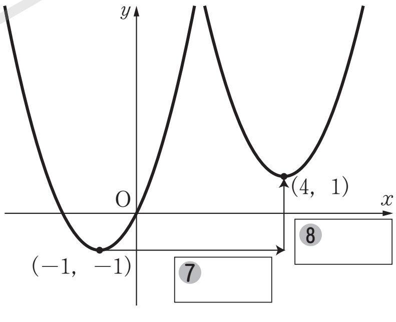
$\boxed{5}$

$y=x^2-8x+17=(x-4)^2-4^2+17$

$=(x-4)^2+1$

より，放物線 $y=x^2-8x+17$ の頂点は

$\boxed{6}$



よって，2 つの放物線は，頂点の

$\boxed{5}$ を $\boxed{6}$ に移動するような平行移動で重ねることができる。

すなわち，x 軸方向に $\boxed{7}$，y 軸方向に $\boxed{8}$ だけ平行移動すればよい。

類題6　放物線 $y=-2x^2+4$ は，平行移動して放物線 $y=-2x^2-4x+6$ に重ねることができる。どのように平行移動すればよいか。

ヒント

⇔ 平方完成は

①　x^2 の係数で x^2，x の項をくくる

②　x の係数の半分の 2 乗を用いて，$(x+○)^2$ の形を作る

ことがポイントである。

例題5の答

1　直線 $x=-2$

2　点 $(-2,\ 1)$

3　直線 $x=3$

4　点 $(3,\ 4)$

⇔ 点 $(a,\ b)$ から点 $(c,\ d)$ への移動量は

x 軸方向：$c-a$

y 軸方向：$d-b$

例題6の答

5　点 $(-1,\ -1)$

6　点 $(4,\ 1)$　7　5

8　2

確 認 問 題

1 次の関数$f(x)$について，$f(0)$，$f(4)$，$f(-1)$，$f(a-2)$の値をそれぞれ求めよ。↔ 例題1

(1) $f(x)=-4x+2$

(2) $f(x)=-2x^2+3x$

2 次の関数の値域を求めよ。また，最大値，最小値があれば，それを求めよ。↔ 例題2

$y=3x+4$ $(-3<x\leqq 2)$

3 次の2次関数のグラフをかけ。↔ 例題3

(1) $y=3x^2$

(2) $y=-\dfrac{2}{5}x^2$

4 次の2次関数のグラフをかけ。↔ 例題4

(1) $y=\dfrac{1}{2}x^2-3$

(2) $y=-2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$

5 次の2次関数のグラフをかけ。↔ 例題5

(1) $y=3x^2+6x-1$

(2) $y=-x^2+6x-8$

6 放物線$y=3x^2+6x+2$は，平行移動して放物線$y=3x^2-12x-13$に重ねることができる。どのように平行移動すればよいか。↔ 例題6

基　本　問　題

1 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=ax+b$ が $f(1)=-5$，$f(-2)=19$ を満たすとき，a，b の値を求めよ。

(2) k を 0 でない定数とする。関数 $f(x)=x^2-5x+2$ において，$f(1)=f(1+k)$ が成り立つとき，k の値を求めよ。

2 $-2 \leqq x < 4$ であるとき，関数 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$ の値域を求めよ。また，最大値，最小値があれば，それを求めよ。

3 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=-\dfrac{1}{3}x^2$　　(2) $y=2x^2-3$　　(3) $y=-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+1$

4 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1) $y=-x^2-4x+1$　　(2) $y=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{3}{2}$

5 次の 2 次関数のグラフをかけ。

(1) $y=-x(x-6)+3$　　(2) $y=(2x-1)^2-3(1-x)$

6 2 次関数 $y=\frac{1}{3}(x+1)(x-4)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $y=0$ のときの x の値を求めよ。

(2) この関数のグラフを，グラフと軸の交点の座標がわかるようにかけ。

7 2 次関数 $y=3x^2$ のグラフを平行移動して，頂点を次のような点としたとき，そのグラフを表す 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ の形で表せ。

(1) $(0,\ -5)$　　(2) $(2,\ 0)$　　(3) $(-1,\ -4)$

8 放物線 $y=x^2+2x+1$ を x 軸方向に 3， y 軸方向に -2 だけ平行移動すると，放物線 $y=ax^2+bx+c$ に重なるとき，a，b，c の値を求めよ。

応　用　問　題

1　定義域が $1 \leqq x \leqq 3$ である関数 $f(x)=ax+b$ において，最大値が 8，最小値が 2 であるとき，a，b の値を求めよ。

2　2 つの放物線 $y=2x^2+4ax+25$，$y=-3x^2+12x+b$ の頂点が一致するような a，b の値を求めよ。

3　放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると放物線 $y=4x^2+24x+37$ に重なった。このとき，a，b，c の値を求めよ。

4　図形を直線や点に関して対称な位置に移すことを対称移動という。
　放物線 $y=2x^2-8x+9$ を次の直線や点に関して対称移動したとき，その放物線の方程式を $y=ax^2+bx+c$ の形で表せ。

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点