高校新演習　数学Ⅰ

目　次

STANDARD

第1講 ≫≫≫ 式の計算

基礎学習

1 整式に関することば

$-4x^3y^2$ のように，いくつかの文字や数の積として表される式を単項式といい，かけ合わせた文字の個数をその単項式の次数という。また，文字以外の部分を係数という。例えば，$-4x^3y^2$ の次数は ❶ であり，係数は ❷ である。とくに，文字 x に着目すると，次数は ❸ ，係数は ❹ である。また，$A=2x^3+6x^2-x+4$ のように，単項式の和で表される式を多項式といい，多項式を作っている各単項式を多項式の ❺ という。なお，単項式は項が 1 つの多項式と考えて，多項式を整式という。

整式の項の中で，含まれている文字が同じ項を同類項という。

整理された整式で，最も次数の高い項の次数をその整式の次数という。

整式 A の次数は ❻ である。

整式 $B=-4x+5x^3+6-2x^2$ を $5x^3-2x^2-4x+6$ のように，次数が高い項から順に並べることを ❼ の順に整理するという。

また，$6-4x-2x^2+5x^3$ のように，次数が低い項から順に並べることを ❽ の順に整理するという。

文字式の次数と係数

$-4x^3y^2$ で文字 y に着目すると

次数　2

係数　$-4x^3$

単項式は着目する文字によって次数や係数が異なることに注意する。

同類項の整理

同類項は係数の和を計算すると 1 つの項になる。

このことを同類項を整理する，またはまとめるという。

2 整式の加法・減法

整式 A，B の加法は $A+B$ の同類項をまとめる。減法 $A-B$ では $A+(-B)$ を計算する。A に B の各項の符号を変えた式を加える。

例　$A=3x^2-4x+5$，$B=2x^2-x-3$ のとき

$$A+B=(3x^2-4x+5)+(2x^2-x-3)$$
$$=(3+2)x^2+(-4-1)x+(5-3)=\boxed{❾\quad}$$

$$A-B=(3x^2-4x+5)-(2x^2-x-3)$$
$$=(3x^2-4x+5)+(-2x^2+x+3)$$
$$=(3-2)x^2+(-4+1)x+(5+3)=\boxed{❿\quad}$$

○次のように縦にそろえて計算してもよい。

$$\begin{array}{rr} & 3x^2-4x+5 \\ +\,) & 2x^2-\ \ x-3 \\ \hline & ❾ \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 3x^2-4x+5 \\ -\,) & 2x^2-\ \ x-3 \\ \hline & ❿ \end{array}$$

point

同類項をまとめる仕組み

$ma+na=(m+n)a$

$ma-na=(m-n)a$

解答　❶ 5　❷ -4　❸ 3　❹ $-4y^2$　❺ 項　❻ 3　❼ 降べき　❽ 昇べき
❾ $5x^2-5x+2$　❿ x^2-3x+8

例題 1

次の解答欄の $\boxed{}$ にあてはまる数または式を入れよ。

解答

$A=x^2y-4xy-3x+5y^3$ について

この式の次数は $\boxed{1}$ で，x に着目すると次数は $\boxed{2}$ であり，

また，y に着目すると，次数は $\boxed{3}$ である。

A を x について降べきの順に整理すると

$A=\boxed{4}\,x^2-\left(\boxed{5}\right)x+\boxed{6}$

A を y について降べきの順に整理すると

$A=5y^3+\left(\boxed{7}\right)y-\boxed{8}$

となる。

類題 1　$A=x^3y-2xy-5x+3y^2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　A を y について降べきの順に整理せよ。

(2)　A は y について何次式であるか答えよ。

例題 2

$A=2x^2-4xy+5y^2$，$B=4x^2+5xy-9y^2$ のとき，次の式を計算せよ。

(1)　$A+B$　　(2)　$A-B$　　(3)　$2A+3B$

解答

(1)　$A+B=(2x^2-4xy+5y^2)+(4x^2+5xy-9y^2)$

$=(2+4)x^2+\left(\boxed{9}\right)xy+(5-9)y^2$

$=6x^2+xy-4y^2$

(2)　$A-B=(2x^2-4xy+5y^2)-(4x^2+5xy-9y^2)$

$=(2x^2-4xy+5y^2)+(-4x^2-5xy+9y^2)$

$=\left(\boxed{10}\right)x^2+\left(\boxed{11}\right)xy+\left(\boxed{12}\right)y^2$

$=-2x^2-\boxed{13}\,xy+\boxed{14}\,y^2$

(3)　$2A+3B=2(2x^2-4xy+5y^2)+3(4x^2+5xy-9y^2)$

$=(4x^2-8xy+10y^2)+\left(\boxed{15}\right)$

$=(4+12)x^2+\left(\boxed{16}\right)xy+\left(\boxed{17}\right)y^2$

$=\boxed{18}$

類題 2　$A=3x^2-2xy+4y^2$，$B=2x^2+3xy-6y^2$ のとき，次の式を計算せよ。

(1)　$A+B$　　(2)　$A-B$　　(3)　$2A+3B$

ヒント

整式の整理

1つの文字に着目して降べき（昇べき）の順に整理することは整式を扱うときに有効である。

例題 1 の答

1 3　2 2　3 3
4 y　5 $4y+3$
6 $5y^3$　7 x^2-4x
8 $3x$

式の整理

x^2，xy，y^2 の項をそれぞれまとめる。

縦書きで計算してもよい。

減法

減法で $A-B=A+(-B)$ によって加法に直すと間違いが防げる。

例題 2 の答

9 $-4+5$　10 $2-4$
11 $-4-5$　12 $5+9$
13 9　14 14
15 $12x^2+15xy-27y^2$
16 $-8+15$　17 $10-27$
18 $16x^2+7xy-17y^2$

3 指数法則

a を n 個かけ合わせたものを a の n 乗といい，$\boxed{❶}$ と表す。ただし，$a^1=\boxed{❷}$ とする。a^1，a^2，a^3，…をまとめて，a の累乗といい，a^n の n をその $\boxed{❸}$ という。

$a^2\times a^3=(a\times a)\times(a\times a\times a)=a^5=a^{2+3}$

$(a^3)^2=(a\times a\times a)\times(a\times a\times a)=a^6=a^{3\times 2}$

$(ab)^2=ab\times ab=(a\times a)\times(b\times b)=a^2b^2$

より，一般に，次の指数法則が成り立つ。

m，n を正の整数とするとき

$a^m\times a^n=a^{\boxed{❹}}$　　$(a^m)^n=a^{\boxed{❺}}$　　$(ab)^n=a^nb^n$

単項式の積
単項式の積は指数法則を使う。

例　$2a^2\times 3ab^2$
$=2\times 3\times a^2\times a\times b^2$
$=6a^3b^2$

4 整式の乗法

整式の積は分配法則

$A(B+C)=AB+AC$　　$(A+B)C=\boxed{❻}+\boxed{❼}$

を使って計算する。

例えば，$(2x-5)(x^2-4x+3)$

$=(2x-5)x^2+(2x-5)\cdot(-4x)+(2x-5)\cdot\boxed{❽}$

$=2x^3-5x^2-8x^2+20x+6x-\boxed{❾}$

$=2x^3-13x^2+26x-\boxed{❾}$

これは2つの式を縦に並べて計算してもよい。

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & x^2 & -4x & +3 \\
\times) & & & 2x & -5 \\
\hline
 & 2x^3 & -8x^2 & +6x & \\
 & & -5x^2 & +20x & -\boxed{❾} \\
\hline
 & 2x^3 & -13x^2 & +26x & -\boxed{❾}
\end{array}
$$

整式の乗法

$(2x-5)(x^2-4x+3)$

上の矢印のように順次かけて計算してもよい。

注意
$(2x-5)\cdot(-4x)$ の
・は，積を表す記号である。

5 乗法公式(1)

(1)　$(a+b)^2=a^2+\boxed{❿}ab+b^2$

(2)　$(a-b)^2=a^2-\boxed{⓫}ab+b^2$

(3)　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

乗法公式
公式を覚えておくと，計算が能率良くできる。

解答　❶ a^n　❷ a　❸ 指数　❹ $m+n$　❺ mn　❻ AC　❼ BC　❽ 3　❾ 15　❿ 2　⓫ 2

例題３

次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+3)(x+7)$　　　　(2)　$(x^3-2x^2-4)(x^2-3x+1)$

解答

(1)　$(2x+3)(x+7)$

$=(2x+3)\cdot x+(2x+3)\cdot\boxed{1\quad}$　　←分配法則

$=2x^2+3x+\boxed{2\quad}x+\boxed{3\quad}$

$=\boxed{4\qquad\qquad}$

(2)　$(x^3-2x^2-4)(x^2-3x+1)$

を縦書きで計算すると

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & x^3 & -2x^2 & & & -4 \\
\times\,) & x^2 & & -3x & & +1 \\
\hline
x^5 & -2x^4 & & -4x^2 & & \\
 & \boxed{5\quad}x^4 & +\boxed{6\quad}x^3 & & +\boxed{7\quad}x & \\
 & & x^3 & -2x^2 & & -4 \\
\hline
\multicolumn{6}{l}{\boxed{8\qquad\qquad\qquad\qquad}}
\end{array}
$$

類題３　次の式を展開せよ。

(1)　$(3x+4)(x+3)$　　　　(2)　$(x^3-x^2+2)(x^2-5x+2)$

例題４

次の式を公式を用いて展開せよ。

(1)　$(2a+3b)^2$　　　　(2)　$(5x-3y)(5x+3y)$

解答

(1)　$(2a+3b)^2=(2a)^2+2\cdot 2a\cdot 3b+\left(\boxed{9\quad}b\right)^2$

$=\boxed{10\qquad\qquad}$

(2)　$(5x-3y)(5x+3y)=\left(\boxed{11\quad}x\right)^2-\left(\boxed{12\quad}y\right)^2$

$=\boxed{13\qquad\qquad}$

（参考）(1)，(2)とも公式を使わなくても，分配法則によって展開することができる。しかし，より複雑な式の展開については公式を有効に使うと計算が早くできる場合が多いので，公式の有効な活用が大切である。

特に(2)は，$17^2-16^2=(17-16)(17+16)=33$ などと数の計算にも応用できる。

類題４　次の式を公式を用いて展開せよ。

(1)　$(x-2y)^2$　　　　(2)　$(3x-y)(3x+y)$

ヒント

整式の乗法

整式の乗法は分配法則にしたがって行う。

$A(B+C)=AB+AC$

$(A+B)C=AC+BC$

整式の展開

整式どうしの積を行い，１つの整式で表すことを，式の展開という。

例題３の答

1　7　2　14　3　21

4　$2x^2+17x+21$

5　-3　6　6　7　12

8　$x^5-5x^4+7x^3-6x^2+12x-4$

公式の活用

(1)では

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(2)では

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

の公式を用いている。

例題４の答

9　3

10　$4a^2+12ab+9b^2$

11　5　12　3

13　$25x^2-9y^2$

6 乗法公式(2)

分配法則から次の乗法公式が得られる。

(4)　$(x+a)(x+b)=x^2+\left(\boxed{\text{❶}\quad}\right)x+ab$

(5)　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+\left(\boxed{\text{❷}\quad}\right)x+bd$

例えば

$$(x+3)(x+2)=x^2+(3+2)x+3\cdot 2$$
$$=x^2+5x+6$$
$$(2x+3)(3x+2)=2\cdot 3\cdot x^2+(2\cdot 2+3\cdot 3)x+3\cdot 2$$
$$=6x^2+13x+6$$

のように計算する。

公式(4)で $a=b$ とすると

$$(x+a)^2=x^2+\boxed{\text{❸}\quad}x+a^2$$

公式(4)で $b=-a$ とすると

$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$$

となり，P.4 の乗法公式の(1)と(3)が得られる。

2次の乗法公式

2次式の乗法公式は次に学ぶ因数分解でもよく使われるので，きちんと覚えておく必要がある。

7 やや複雑な式の展開

(1)　$(a+b+c)^2=\{a+(b+c)\}^2$

$$=a^2+\boxed{\text{❹}\quad}a(b+c)+\left(\boxed{\text{❺}\quad}\right)^2$$
$$=a^2+\boxed{\text{❹}\quad}ab+\boxed{\text{❹}\quad}ac+b^2+\boxed{\text{❻}\quad}bc+c^2$$
$$=\boxed{\text{❼}\qquad\qquad}$$

(2)　$(x+y-z)(x+y+z)=\left(\boxed{\text{❽}\quad}\right)^2-z^2$

$$=x^2+\boxed{\text{❾}\quad}-z^2$$
$$=\boxed{\text{❿}\qquad\qquad}$$

(3)　$(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)=\{(x^2+y^2)-xy\}\{(x^2+y^2)+xy\}$

$$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$=\boxed{\text{⓫}\qquad\qquad}$$

やや複雑な式の展開

直接には乗法公式が使えない場合でも，工夫をすること(文字の置きかえなど)によって乗法公式が使える場合がある。

式の形を見て乗法公式を使えるように，いろいろな問題にあたっておこう。

$x^2+y^2=A$ とおいて考えてみる。

解答　❶ $a+b$　❷ $ad+bc$　❸ $2a$　❹ 2　❺ $b+c$　❻ 2　❼ $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
❽ $x+y$　❾ $2xy+y^2$　❿ $x^2+y^2+2xy-z^2$　⓫ $x^4+y^4+x^2y^2$

例題5

次の式を展開せよ。

(1) $(x+5y)(x+3y)$　　(2) $(x-7y)(x+4y)$

(3) $(3x+2)(3x-4)$　　(4) $(2x+3y)(3x+2y)$

解答

(1) $(x+5y)(x+3y)$

$=x^2+\boxed{1}\,xy+15y^2$

(2) $(x-7y)(x+4y)$

$=x^2-\boxed{2}\,xy-28y^2$

(3) $(3x+2)(3x-4)$

$=(3x)^2-\boxed{3}\,x-8$

$=\boxed{4}$

(4) $(2x+3y)(3x+2y)$

$=\boxed{5}$

類題5　次の式を展開せよ。

(1) $(x+2y)(x+3y)$　　(2) $(x-4y)(x+3y)$

(3) $(3x+5)(3x-1)$　　(4) $(2x+5y)(3x+y)$

例題6

次の式を展開せよ。

(1) $(a-2b+c)^2$　　(2) $(a^2+2a-5)(a^2+2a-3)$

解答

(1) $(a-2b+c)^2$

$=(a-2b)^2+\boxed{6}\,(a-2b)c+c^2$

$=a^2-4ab+4b^2+\boxed{7}\,ca-\boxed{8}\,bc+c^2$

$=\boxed{9}$

(2) $(a^2+2a-5)(a^2+2a-3)$

$=\{(a^2+2a)-5\}\{(a^2+2a)-3\}$

$=(a^2+2a)^2-\boxed{10}\,(a^2+2a)+\boxed{11}$

$=\boxed{12}$

類題6　次の式を展開せよ。

(1) $(a-3b+c)^2$　　(2) $(a^2+3a-4)(a^2+3a-2)$

ヒント

公式の活用

与えられた式が公式の文字の代わりにどのような文字が代入されているかをみる。

例題5の答

1 8　2 3　3 6

4 $9x^2-6x-8$

5 $6x^2+13xy+6y^2$

公式が使える工夫

例題6(2)では，a^2+2a を A とおくと

$(A-5)(A-3)$

となり，公式が使える。

例題6の答

6 2　7 2　8 4

9 $a^2+4b^2+c^2-4ab-4bc+2ca$

10 8　11 15

12 $a^4+4a^3-4a^2-16a+15$

確認問題演習

1 $A=2x^2y^2-3xy-2y+3y^3$ について，次の問いに答えよ。↔ 例題1

(1) A を y について降べきの順に整理せよ。

(2) A は xy について，何次式であるか答えよ。

(3) A は y について，何次式であるか答えよ。

2 $A=x^2-xy+y^2$，$B=3x^2+4xy+y^2$ のとき，次の式を計算せよ。↔ 例題2

(1) $A+B$

(2) $B-A$

(3) $2A+3B$

3 次の式を展開せよ。↔ 例題3

(1) $(2x+5)(x-6)$

(2) $(x^2-3x-4)(x^3-x+5)$

(3) $(x-2)(x^2+2x+4)$

4 次の式を展開せよ。↔ 例題4

(1) $(a-2b)^2$

(2) $(x+3y)(x-3y)$

(3) $(2x+3y)^2$

(4) $(3x-2y)(3x+2y)$

5 次の式を展開せよ。↔ 例題5

(1) $(2x+3)(2x-5)$

(2) $(2x-3)(3x+2)$

(3) $(5x+y)(3x-2y)$

(4) $(4x+3y)(x-2y)$

6 次の式を展開せよ。↔ 例題6

(1) $(x-2y+3z)^2$

(2) $(x^2+x-5)(x^2+x+3)$

基本問題演習

1 $A=3x^2-4x+1$, $B=2x^2+5x-3$ のとき，$A+B$, $A-B$ を計算せよ。

2 $A=3x^2+4x-1$, $B=-7x^2+2x-3$ のとき，$4A-2B-2(A-3B)$ を計算せよ。

3 次の計算をせよ。

(1) $(-a)^2\times a^4$　　(2) $2(x^3)^2y^4\times(-3xy)^2$　　(3) $(-3ab^2c^3)^3\times5(a^2b)^2$

4 乗法公式を用いて次の式を展開せよ。

(1) $(2a+3b)^2$

(2) $(4x+3y)(3x-4y)$

5 次の式を展開せよ。

(1) $(x^2-2x-3)(3x-4)$

(2) $(x^3+2x^2-4)(5x+3)$

6 次の式を展開せよ。

(1) $(a+2b-4c)(a-2b+4c)$

(2) $(4x-y)(16x^2+4xy+y^2)$

7 次の式を展開せよ。

(1) $(a^2+3a+5)(a^2-3a+5)$

(2) $(a+b-2c)^2$

応　用　問　題　演　習

1　$P=2x^3-4x^2+3x-1$，$Q=2-3x+4x^3$，$R=5x^3+2-3x^2$ のとき，$4P-3Q-2(P-R)$ を計算せよ。

2　次の式を展開せよ。

(1)　$(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)$

(2)　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

3　$(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$ を展開せよ。

4　$2x^2-6xy+3y^2$ の x，y の代わりに，それぞれ $3X+2Y$，$4X+3Y$ を代入して得られる式を $AX^2+2BXY+CY^2$ とするとき，次の値を求めよ。

(1)　A

(2)　C

(3)　$AC-B^2$