もくじ

26 三平方の定理と平面図形

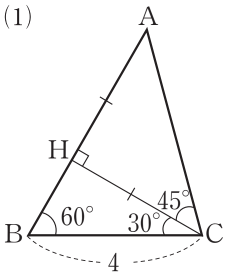
基本事項
❶ 三角形や四角形の高さ，面積などを求めるのに，三平方の定理を利用する。
❷ いろいろな平面図形の問題を解くとき，しばしば三平方の定理が必要となる。
❸ 座標平面上の2点間の距離は，三平方の定理を利用する。

例題 1 三角形・四角形への利用①

次の図形の面積を求めなさい。

(1) $\angle B=60^\circ$，$\angle C=75^\circ$，BC＝4 の△ABC

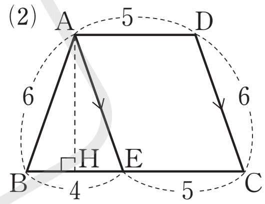
(2) AD∥BC，AD＝5，BC＝9，AB＝CD＝6 の台形ABCD

(1)


解法 (1) 60°，75°＝30°＋45° に注目し，Cから辺ABに垂線CHをひくと，△HBCは3つの角が30°，60°，90°の直角三角形であり，△AHCは直角二等辺三角形である。

$\mathrm{HB}=4\times\frac{1}{2}=2$，$\mathrm{CH}=2\sqrt{3}$　　また，$\mathrm{AH}=\mathrm{CH}=2\sqrt{3}$

求める面積は，$\frac{1}{2}\times\mathrm{AB}\times\mathrm{CH}=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3}+2)\times2\sqrt{3}=6+2\sqrt{3}$

(2)


(2) 右の図のように，AE∥DC となる補助線AEをひくと，台形ABCDは，二等辺三角形ABE，平行四辺形AECDに分けられる。

AからBEに垂線AHをひくと，$\mathrm{BH}=\mathrm{HE}=(9-5)\div2=2$

△ABHで，三平方の定理により，$\mathrm{AH}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

よって，求める面積は，$\frac{1}{2}\times\mathrm{BE}\times\mathrm{AH}+\mathrm{EC}\times\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}+5\times4\sqrt{2}=28\sqrt{2}$

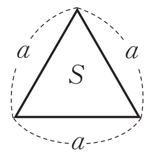
答 (1) $6+2\sqrt{3}$　(2) $28\sqrt{2}$

確認問題

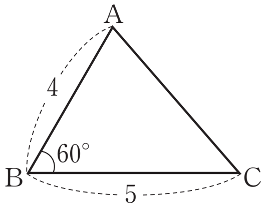
□**1** 右に示した正三角形の面積の公式を導きなさい。
ただし，正三角形の1辺の長さを a，面積を S とする。

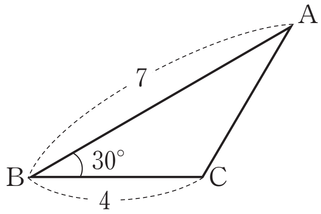
正三角形の面積の公式

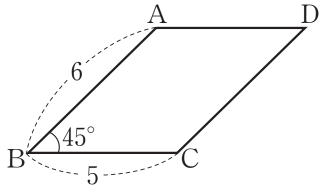
$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

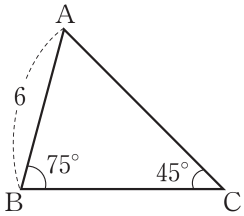


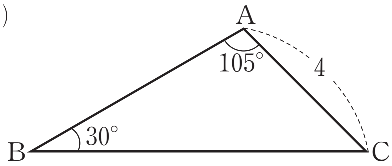
2 次の図の三角形や平行四辺形，台形の面積を求めなさい。

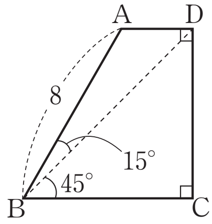
□(1)


□(2)


□(3) 平行四辺形


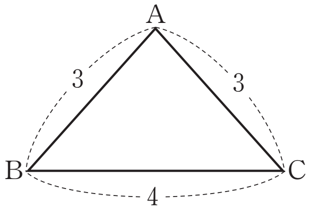
□(4)


□(5)


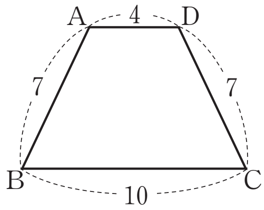
□(6)


3　次の図の二等辺三角形，等脚台形，ひし形の面積を求めなさい。

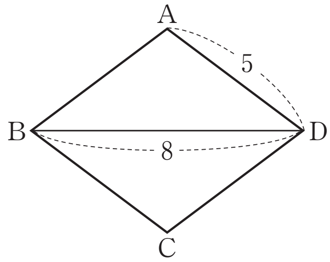
☐(1)



☐(2)



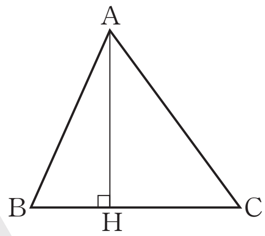
☐(3)



例題 2　三角形・四角形への利用②

右の図は，AB＝13，BC＝14，CA＝15 の△ABCで，頂点Aから辺BCへ垂線AHをひいたものである。次の(1)〜(3)を求めなさい。

(1)　線分BHの長さ　　(2)　線分AHの長さ　　(3)　△ABCの面積



解法　直角三角形ABH，ACHで辺AHが共通であることに注目する。

(1)　BH＝x とおくと，CH＝$14-x$

△ABH，△ACHのそれぞれで，三平方の定理により，

$AH^2=AB^2-BH^2$　　$AH^2=AC^2-CH^2$

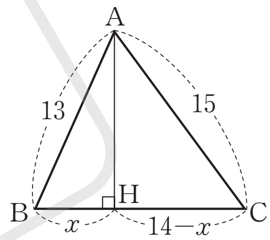
よって，$AB^2-BH^2=AC^2-CH^2$

$13^2-x^2=15^2-(14-x)^2$

これを解いて，BH＝$x=5$

(2)　$AH^2=13^2-5^2=144$　　AH＞0 より，AH＝12

(3)　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times BC\times AH=\dfrac{1}{2}\times 14\times 12=84$



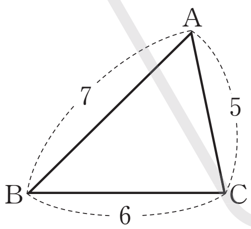
△ABHは，5：12：13型
AB＝13，BH＝5 より，AH＝12

答　(1)　5　(2)　12　(3)　84

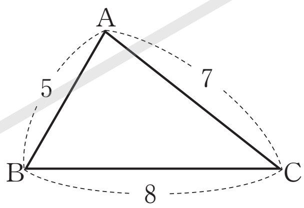
確認問題

4　次の△ABCの面積を求めなさい。

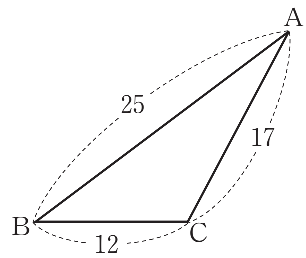
☐(1)



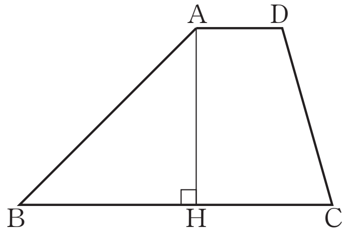
☐(2)



☐(3)



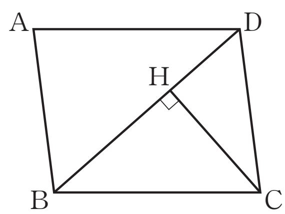
5　右の図は，AD∥BC の台形ABCDで，AB＝16，BC＝20，CD＝12，DA＝6 である。次の問いに答えなさい。



☐(1)　点Aから辺BCに垂線AHをひく。AHの長さを求めよ。

☐(2)　台形ABCDの面積を求めよ。

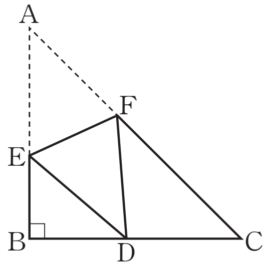
☐**6**　右の図の▱ABCDで，AB＝4，BC＝5，BD＝6，BD⊥CHである。▱ABCDの面積を求めなさい。



例題 3　平面図形への利用

右の図は，AB＝BC＝8 の直角二等辺三角形の紙ABCを，線分EFを折り目として頂点Aが辺BCの中点Dに重なるように折ったものである。

BEの長さを求めなさい。



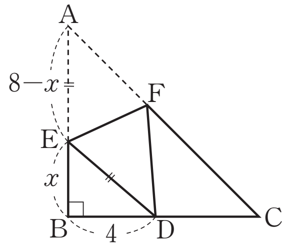
折り返したものだから，
△EDF≡△EAF

解法　BE＝x とおき，直角三角形EBDに注目する。
折り返したものだから，ED＝EA＝8－x
△EBDにおいて，三平方の定理により，

$$BE^2+BD^2=ED^2$$

よって，　$x^2+4^2=(8-x)^2$

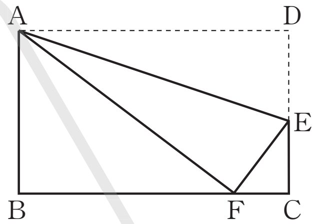
これを解いて，　$x=3$



答　3

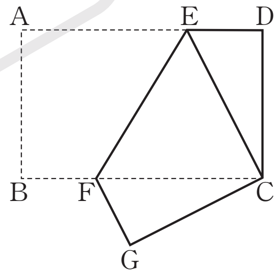
確認問題

□**7**　右の図はAB＝9，AD＝15 の長方形の紙ABCDを，線分AEを折り目として頂点Dが辺BC上の点Fに重なるように折ったものである。
このとき，DEの長さを求めなさい。



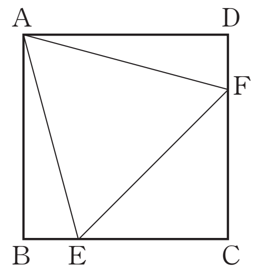
8　右の図は，AB＝3，AD＝5 の長方形の紙ABCDを，頂点Aが頂点Cに重なるように折ったものである。
折り目の線分をEF，頂点Bが移った点をGとするとき，次の⑴，⑵を求めなさい。

□⑴　DEの長さ　　□⑵　台形EFGCの面積

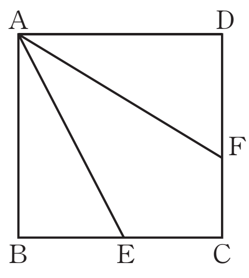


9　右の図のように，１辺の長さが１の正方形ABCDに正三角形AEFが内接している。
次の⑴，⑵を求めなさい。

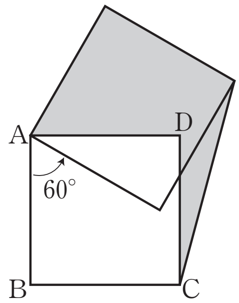
□⑴　BEの長さ　　□⑵　△AEFの面積



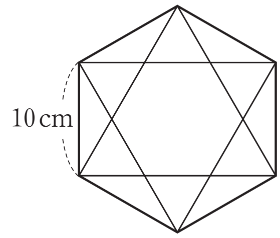
□**10**　右の図の四角形ABCDは１辺の長さが15cmの正方形である。辺BC上に，BE＝8cmとなる点Eをとり，∠DAEの二等分線と辺CDの交点をFとする。
このとき，線分DFの長さを求めなさい。



□**11**　1辺の長さが a の正方形ABCDがある。図のように頂点Aを中心として，矢印の方向に60°回転させたとき，影をつけた部分の面積を a を用いて表しなさい。



12　となり合う辺の長さが10cm，x cmである長方形を3つ重ねて，1辺が10cmの正六角形をつくる。次の問いに答えなさい。



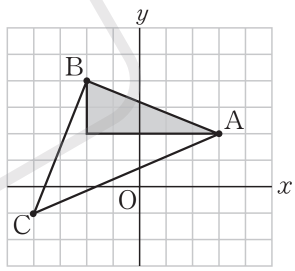
□(1)　x の値を求めよ。

□(2)　この正六角形で，長方形が2つだけ重なっている部分の面積を求めよ。

□(3)　この正六角形で，長方形が3つ重なっている部分の面積を求めよ。

例題 4　座標平面上の2点間の距離

座標平面上の3点A(3，2)，B(−2，4)，C(−4，−1)を頂点とする△ABCはどんな三角形ですか。



解法　3辺の長さを求め，その間に成り立つ関係を調べる。
辺ABの長さは，右の図のように，ABを斜辺とする直角三角形を考え，三平方の定理を利用して求める。

$AB^2=(-2-3)^2+(4-2)^2=25+4=29$

$BC^2=\{-4-(-2)\}^2+(-1-4)^2=4+25=29$

$CA^2=\{3-(-4)\}^2+\{2-(-1)\}^2=49+9=58$

よって，$AB^2=BC^2$ より，AB＝BC

また，$AB^2+BC^2=CA^2$ より，∠B＝90°

POINT
2点A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)間の距離
$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

答　AB＝BC，∠B＝90°の直角二等辺三角形

確認問題

13　次の2点A，B間の距離を求めなさい。

□(1)　A(2，−6)，B(7，6)　　□(2)　A(5，−2)，B(−3，−4)　　□(3)　A(−1，−3)，B(−2，−1)

14　次の3点A，B，Cを頂点とする△ABCは，どんな三角形ですか。

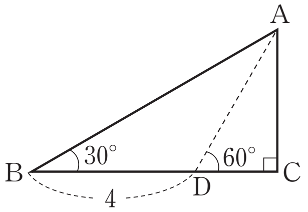
□(1)　A(6，4)，B(−2，5)，C(4，1)　　□(2)　A(3，3)，B(−1，2)，C(4，−1)

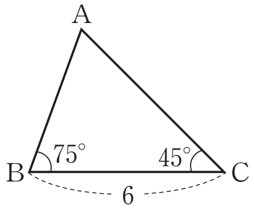
□(3)　A(2，4)，B(−5，1)，C(−1，−3)　　□(4)　A(−2，1)，B(4，−1)，C($\sqrt{3}+1$，$3\sqrt{3}$)

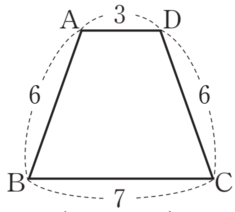
□**15**　y 軸上にあり，2点A(1，3)，B(4，2)から等しい距離にある点Pの座標を求めなさい。

演 習 問 題 A

1　[三角形・四角形への利用①]　次の図形の面積を求めなさい。

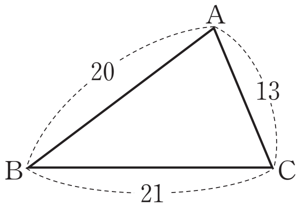
□(1)


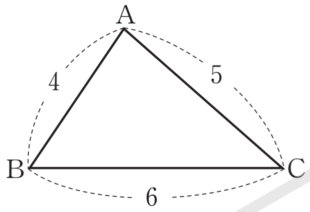
□(2)


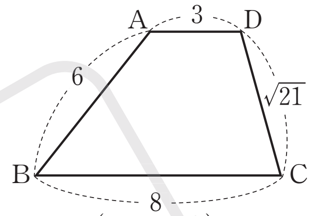
□(3)


(AD∥BC)

2　[三角形・四角形への利用②]　次の図形の面積を求めなさい。

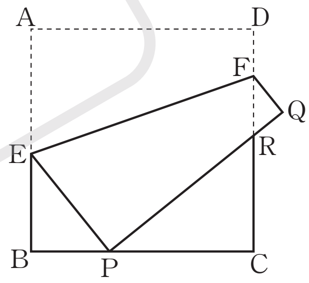
□(1)


□(2)


□(3)


(AD∥BC)

3　[平面図形への利用]　１辺の長さが６の正方形ABCDがある。辺BC上にBP＝2となる点Pをとり，右の図のように頂点Aが点Pと重なるように折り曲げる。折り目の線分をEFとし，頂点Dが点Qの位置にあるとする。次の問いに答えなさい。



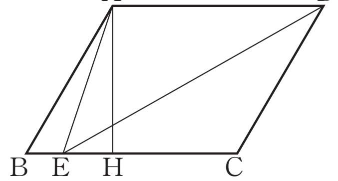
□(1)　線分AEの長さを求めよ。

□(2)　辺PQと辺CDの交点をRとするとき，線分CRの長さを求めよ。

□(3)　△EBPと△FQRの面積の比を求めよ。

□**4　[平面図形への利用]**　右の図のように，AB＝6cm，BC＝8cm の▱ABCDがあり，その面積は$16\sqrt{5}$ cm^{2}である。∠ADCの二等分線と辺BCとの交点をEとし，Aから辺BCに垂線をひき，BCとの交点をHとする。

　このとき，線分BE，BH，AEの長さをそれぞれ求めなさい。



5　[座標平面上の２点間の距離]　次の問いに答えなさい。

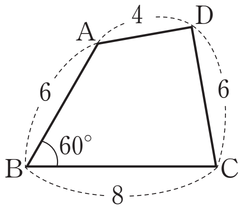
□(1)　３点A(−2，5)，B(−4，−2)，C(5，3)を頂点とする△ABCはどんな三角形か。

□(2)　２点A(1，4)，B(5，−2)と，x軸上にある点Cを頂点とする△ABCが，∠C＝90°の直角三角形であるとき，Cの座標をすべて求めよ。

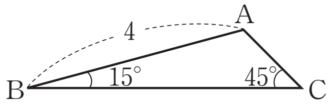
演習問題 B

1　次の図の面積を求めなさい。

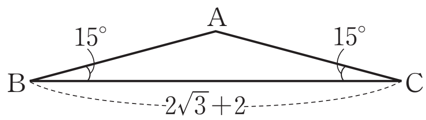
□(1)



□(2)

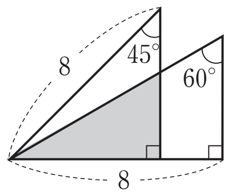


□(3)

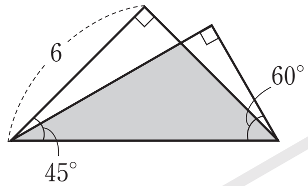


2　次の図形は，2つの直角三角形を組み合わせたものである。影をつけた部分の面積を求めなさい。

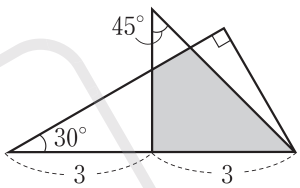
□(1)



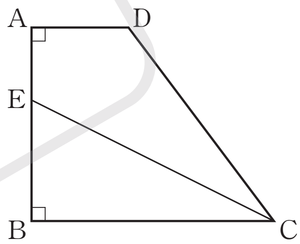
□(2)



□(3)



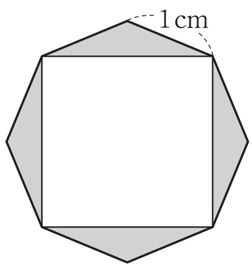
3　右の図のような，∠A＝∠B＝90°，AD∥BCである台形ABCDにおいて，頂点Dが頂点Bと重なるように折ったとき，折り目の線分がCEとなった。AB＝4cm，AD＝2cmのとき，次の問いに答えなさい。



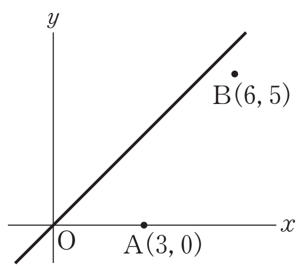
□(1)　AEの長さを求めよ。

□(2)　CEの長さを求めよ。

□**4**　右の図のように，1辺の長さが1cmの正八角形から，頂点を1つおきに結んでできる正方形をとり除くとき，残りの部分の面積を求めなさい。



5　右の図で，点Oは原点，点Aの座標は(3, 0)，点Bの座標は(6, 5)である。次の問いに答えなさい。



□(1)　直線$y=x$について，点Aと対称な点A′の座標を求めよ。

□(2)　点Pが直線$y=x$上を動くとき，AP＋PBの長さの最小値を求めよ。