もくじ

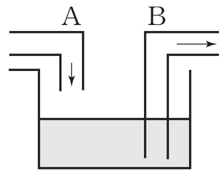
14　１次関数の利用

基本事項　❶　１次関数は，時間と水量の関係，時間と面積の関係，時間と進んだ道のりの関係，使用量と料金の関係などを表すことに用いられる。グラフの読みとり方を身につける。

❷　時間と道のりのグラフでは，直線の傾きは速さを表し，２直線の交点は「追い越す」や「出会う」を表す。

例題 1　水量の変化

右の図のような10Lの水が入っている水そうがある。この水そうに，A管から毎分２Lの割合で水を入れる。A管から水を入れはじめてから５分後に，水を入れ続けながらB管から毎分３Lの割合で水をくみ出すものとする。A管から水を入れはじめてからx分後の水そうの水の量をyLとする。このとき，次の問いに答えなさい。



(1)　xの変域が$0 \leqq x \leqq 5$のとき，yをxの式で表せ。

(2)　$x=7$のとき，yの値を求めよ。

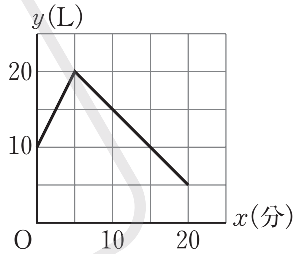
(3)　A管から水を入れはじめてから水そうの水の量が５Lになるまでのxとyの関係を表すグラフをかけ。

解法　(1)　$0 \leqq x \leqq 5$のとき，x分間に$2x$Lの水が入るから，$y=2x+10$

(2)　$x=5$のとき，$y=2\times5+10=20$(L)　その後は，毎分１Lの割合でyが減少するから，$x=7$のとき，$y=20-(7-5)\times1=18$

(3)　$x \geqq 5$のとき，$y=20-(x-5)\times1=-x+25$

答　(1)　$y=2x+10$　　(2)　$y=18$　　(3)　右の図



確認問題

1　図１のように，水が10L入っている水そうがある。この水そうに，はじめの２分間は排水管Cを閉じたまま給水管A，Bから同時に水を入れ，次の６分間は給水管A，Bから水を入れ続けながら排水管Cを開いて水を出した。その後は，給水管A，排水管Cを閉じて給水管Bから水を入れ続けた。**図２**は，給水管A，Bから同時に水を入れはじめてからx分後の水そうの水の量をyLとして，x，yの関係をグラフに表したものである。ただし，給水管A，Bおよび排水管Cから出る毎分の水の量は一定とする。

図１

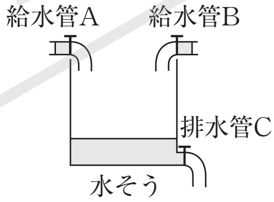
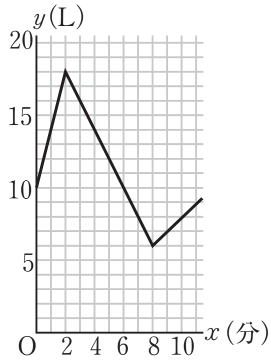


図２



□(1)　給水管Aを開いているとき，給水管Aから水そうに入る水の量は毎分何Lか。

回(2)　xの変域が$2 \leqq x \leqq 8$のとき，yをxの式で表せ。

2　図１のような，直方体のおもりが入った直方体の容器に，毎秒80cm³の割合で水を入れて満水にする。**図２**は，このときの水を入れはじめてからx秒後の，容器の底面からの水の深さを$y$cmとして，xとyの関係を表したものである。

図１

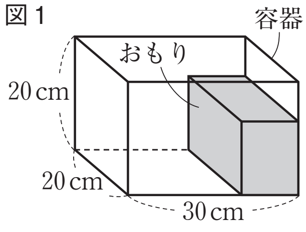
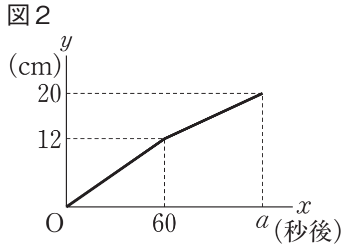


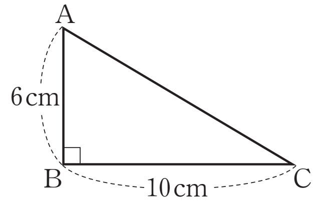
図２



□(1)　おもりの体積を求めよ。

回(2)　**図２**で，aの値を求めよ。また，求めたaの値を用いて，$60 \leqq x \leqq a$のとき，yをxの式で表せ。

例題 2　動点と図形の面積



右の図のような直角三角形ABCがある。点Pは点Aを出発点として，毎秒2cmの速さで△ABCの辺上を点Bを通り点Cまで動く。点Pが点Aを出発してからx秒後の△APCの面積をy cm²とするとき，次の問いに答えなさい。

(1)　xの変域を2つに分け，それぞれの場合について，yをxの式で表せ。

(2)　△APCの面積が20cm²になるのは，点Pが点Aを出発してから何秒後か。すべて求めよ。

解法　(1)　点PがAB上を動くときと，BC上を動くときとでは，xとyの関係式は異なる。

点PがAB上にある場合，xの変域は $0 \leqq x \leqq 3$

図1のようになるから，$y=\frac{1}{2}\times 2x \times 10$ → $y=10x$

点PがBC上にある場合，xの変域は $3 \leqq x \leqq 8$

図2のようになるから，$y=\frac{1}{2}\times(16-2x)\times 6$ → $y=-6x+48$

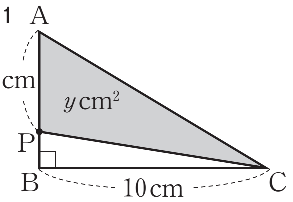
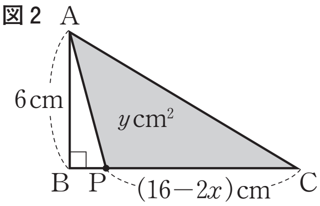
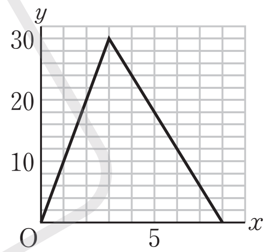
図1


図2


(2)　(1)のそれぞれの式をグラフにかくと**図3**のようになる。

$y=20$とすると，

$20=10x$より，$x=2$(秒後)，$20=-6x+48$より，$x=\frac{14}{3}$(秒後)

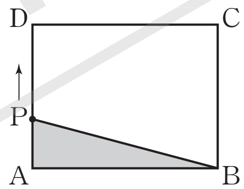
図3


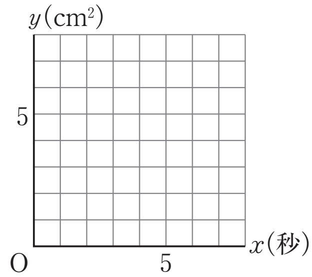
答　(1)　$0 \leqq x \leqq 3$のとき$y=10x$　　$3 \leqq x \leqq 8$のとき$y=-6x+48$

(2)　2秒後，$\frac{14}{3}$秒後

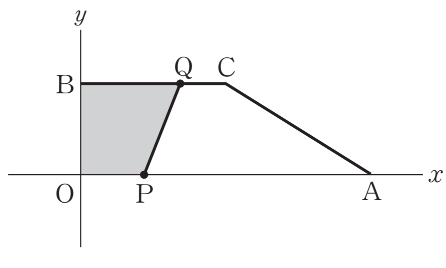
確認問題

□**3**　右の図のように，AB＝4cm，AD＝3cmの長方形ABCDがある。点Pが毎秒1cmの速さで，この長方形の周上を，点Aを出発点として，点Dを通って点Cまで移動する。点Pが出発してからx秒後の△PABの面積をy cm²とするとき，xとyの関係を表すグラフをかきなさい。ただし，時間xは点Pが点Cに着くまでとする。





4　座標平面上に3点A(12, 0)，B(0, 4)，C(6, 4)がある。いま，点Pは毎秒2cmの速さでx軸上を原点Oから点Aまで動く。また，点Qは毎秒3cmの速さで線分BC上を点Bから点Cまで，B→C→B→Cの順に動くものとする。点P，Qが同時に出発してからt秒後の四角形OPQBの面積をS cm²とするとき，次の問いに答えなさい。ただし，座標の目もりの単位はcmとする。



□(1)　点Pは，出発してから何秒後に点Aに着くか。

(2)　次の各場合に分けて，Sをtの式で表せ。また，tの範囲を求めよ。

□①　点Qがはじめに点Bから点Cまで動くとき

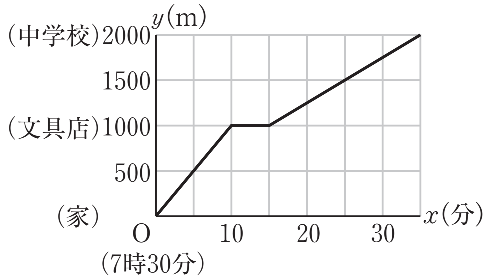
□②　点Qが点Cから点Bまで動くとき

□③　点Qが再び点Bから点Cまで動くとき

□(3)　図形OPQBの面積が台形OACBの面積の$\frac{1}{2}$となるのは，点Pが出発してから何秒後か。すべて求めよ。

例題 3　速さとグラフ

Ａさんは，毎朝歩いて中学校に通っている。この日は，７時30分に家を出発し，途中の文具店でノートを買ってから学校に行った。右のグラフは，Ａさんが家を出発してからの時間と道のりの関係を表したものである。



(1)　家を出てから文具店までのＡさんの歩く速さは，分速何ｍか。

(2)　家を出発してからx分後の家からの道のりをyｍとして，文具店を出てから中学校までについて，yをxの式で表せ。

(3)　Ａさんは，７時56分には，中学校から何ｍの地点にいるか。

(4)　Ａさんの兄は，７時55分に自転車で家を出発し，Ａさんと同じ道を通って，中学校の先にある高校へ向かった。自転車の速さを分速300ｍとすると，兄がＡさんを追い越したのは何時何分か。

解法　(1)　速さは直線の傾きに等しいから，$\dfrac{1000}{10}=100$ より，分速100ｍ

(2)　点(15，1000)を通り，傾き $\dfrac{500}{10}=50$ の直線だから，$y=50x+250$ …①

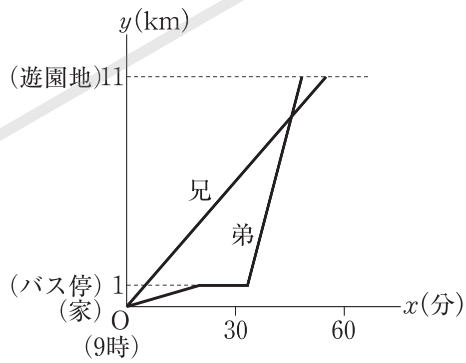
(3)　７時56分は，家を出発してから，56－30＝26(分後)だから，①に$x=26$ を代入して，
$y=50\times26+250=1550$　　よって，中学校からの道のりは，2000－1550＝450(ｍ)

(4)　兄についてのグラフは，点(25，0)を通り，傾き300の直線だから，式は，$y=300x-7500$ …②
①，②を連立方程式として解くと，$x=31$，$y=1800$　よって，Ａさんが出発してから31分後の８時１分

答　(1)　分速100ｍ　　(2)　$y=50x+250$　　(3)　450ｍ　　(4)　８時１分

確認問題

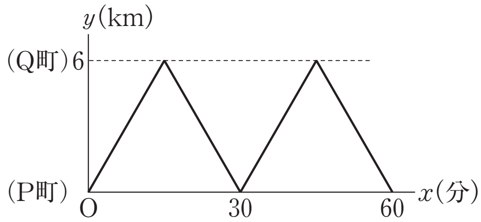
5　兄と弟が午前９時ちょうどに家を出発し，同じ道を通って家から11km離れた遊園地に向かった。兄は自転車に乗り，毎時12kmの速さで行った。弟は１km離れたバス停まで毎時３kmの速さで歩き，そこで13分間待ち，バスに15分間乗って遊園地に到着した。右の図は，兄と弟が家を出発してからx分後の家からの道のりを$y$kmとして，x，yの関係をグラフに表したものである。



□(1)　弟がバスに乗っている間のグラフについて，yをxの式で表せ。

□(2)　弟の乗ったバスが兄の自転車に追いついたのは，家から何kmの地点か。

6　Ｐ町と６km離れたＱ町がある。ＡさんとＢさんの２人がＰ町を同時に出発し，ＡさんはＰ町とＱ町の間を一定の速さで自転車で２往復し，ＢさんはＰ町からＱ町まで，時速６kmの速さで歩いた。右のグラフは，Ｐ町を出発してからx分後のＰ町からの道のりを$y$kmとして，Ａさんの２往復するようすを表したものである。



□(1)　Ａさんの自転車の速さは分速何kmか。

□(2)　ＡさんとＢさんがはじめてすれ違ったのは，出発してから何分後か。

□(3)　ＡさんとＢさんが２度目にすれ違ったのは，ＢさんがＡさんに追いぬかれてから何分後か。

例題 4　料金の問題

ある町の水道料金は，使用した水の量の1次関数になっている。ある家庭の水道料金は3月に16m^{3}使って3810円，5月に19m^{3}使って4440円であった。このとき，次の問いに答えなさい。

(1)　使用した水の量をx m^3，水道料金をy円として，yをxの式で表せ。

(2)　7月に25m^{3}使ったとき，水道料金を求めよ。

解法　(1)　求める1次関数の式を $y=ax+b$ とおく。

$$\begin{cases} 3810=16a+b \\ 4440=19a+b \end{cases}$$

これを解いて，$a=210$，$b=450$　　よって，$y=210x+450$

(2)　(1)で求めた式において $x=25$ とすると，$y=210\times25+450=5700$

答　(1)　$y=210x+450$　　(2)　5700円

確認問題

7　ある電力会社の1か月の電気料金は，基本料金とその月の電力使用量に応じた電力量料金の合計であり，次のようになっている。このとき，あとの問いに答えなさい。

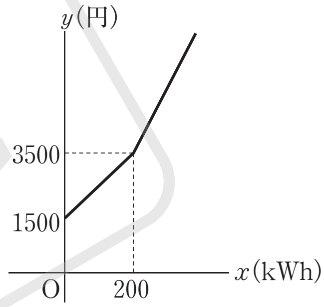
・基本料金は1500円

・電力使用量が200kWh以下の場合は，1kWhあたりの電力量料金は10円

・電力使用量が200kWhを超えた場合は，1kWhあたりの電力量料金は20円

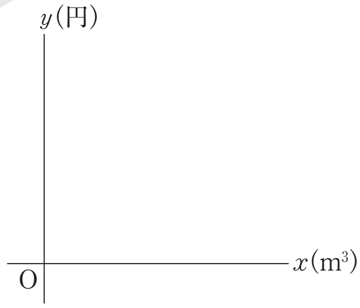
□(1)　ある月の電力使用量が150kWhであったとき，この月の電気料金を求めよ。

回(2)　右の図は，電力使用量をx kWh，電気料金をy円として，xとyの関係をグラフに表したものである。$x>200$ のとき，yをxの式で表せ。



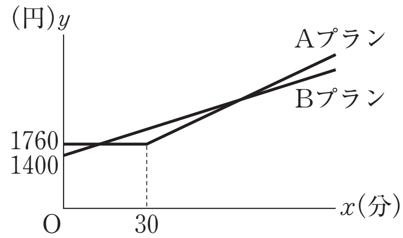
□**8**　ある自治体の水道料金は，基本料金に使用量に応じた使用料金を加算して計算され，基本料金と使用料金の一部は次のようになっている。水道の使用量x m^3($0\leqq x<60$)と水道料金y円の関係を式で表し，右の図にグラフをかきなさい。x軸，y軸の目もりは各自入れること。

基本料金	使用料金		
3040円	20m^{3}未満	20m^{3}以上40m^{3}未満	40m^{3}以上60m^{3}未満
	0円	1m^{3}につき130円	1m^{3}につき175円



回**9**　ある携帯電話会社では，1か月の電話料金プランを下の表のように設定している。ただし，1か月の電話料金は，月額基本使用料と通話料金の合計とし，無料通話分の時間内では，月額基本使用料のみがかかり，通話料金はかからない。右の図は，1か月の通話時間をx分，電話料金をy円として，2つのプランについて，それぞれxとyの関係を表したグラフである。

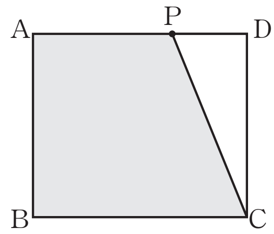
	月額基本使用料	無料通話分	通話料金
Aプラン	1760円	30分以下の通話について無料	30分を超えた時間について1分ごとに36円
Bプラン	1400円		1分ごとに24円



1か月の電話料金について，Aプランの方がBプランよりも安くなるのは，1か月の通話時間が何分を超えて何分未満のときか求めなさい。

演習問題 A

1 ［動点と図形の面積］ AB＝3cm，AD＝4cm である長方形ABCDの周上を，点Aから毎秒１cmの速さで出発して，点Dを通り点Cまで動く点Pがある。x秒後の四角形ABCPの面積をy cm^{2}とするとき，次の問いに答えなさい。

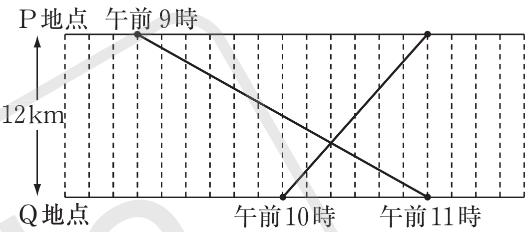


□(1)　$0<x<4$ のとき，y を x の式で表せ。

□(2)　$4 \leqq x<7$ のとき，y を x の式で表せ。

□(3)　$y=8$ となるとき，x の値をすべて求めよ。

2 ［速さとグラフ］ 12km離れた２地点P，Qがある。Aさんは午前９時にP地点から徒歩でQ地点に向かい午前11時に着いた。Bさんは午前10時にQ地点からジョギングでP地点に向かい午前11時に着いた。Cさんは午前10時10分にQ地点から自転車でP地点に向かい，P地点に着いたらすぐに折り返し，Q地点に戻ってきた。途中３人は10時20分に同時に出会った。右の図はAさんとBさんの動きを表すグラフである。次の問いに答えなさい。



□(1)　AさんがP地点を出発してからx時間後のQ地点からの距離をy kmとして，y を x の式で表せ。

□(2)　Cさんの速さは時速何kmか。

□(3)　Cさんの動きを表すグラフを右上の図にかきこめ。

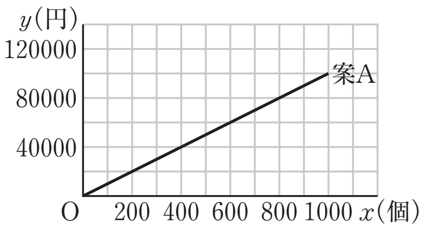
□(4)　Bさん，Cさんの２人だけが出会った時刻は何時何分何秒か。

3 ［料金の問題］ あるクラスは，文化祭でグッズ販売を行う。工場と交渉したところ，次の２案が示された。

案A：あらかじめ商品を1000個準備しておく。
　　１個あたり100円として，売れた個数分だけ工場に代金を支払う。残った商品は返品できる。

案B：あらかじめ商品を1000個準備しておく。
　　先に600個分の代金40000円を工場に支払う。ただし，この600個については返品できない。そして，600個を超えた分は，１個あたり200円として，売れた個数分だけ工場に代金を支払い，残った商品は返品できる。

売れた商品の個数をx個，工場に支払う代金をy円とする。右の図は，案Aについて，xとyの関係をグラフに表したものである。
次の問いに答えなさい。



□(1)　案Bについて，x と y の関係をグラフに表せ。

□(2)　工場に支払う代金が，案Aより案Bの方が安くなるとき，xの値の範囲を求めよ。

演習問題 B

1　**図 1** のように，1辺の長さが4mの立方体の水そうがあり，底面には長方形の仕切り板が2枚置かれている。この仕切り板の高さはそれぞれ1mと2mであり，高さ1mの仕切り板の左側の部分に上から水を入れる。**図 2** は，水を入れ始めてからx分後の水面の高さをymとして，はじめのt分間は毎分$\frac{4}{5}$m^3，それから水そうが満たんになるまでは毎分am^{3}で入れたときのxとyの関係をグラフに表したものである。次の問いに答えなさい。

図 1

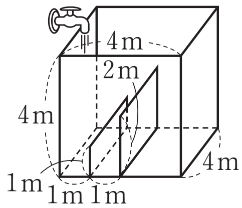
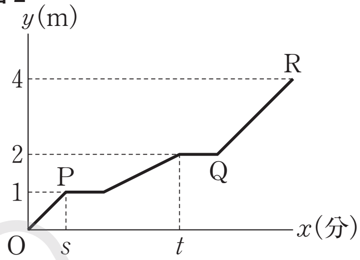


図 2



□(1)　**図 2** のグラフにおいて，s，tの値をそれぞれ求めよ。

□(2)　**図 2** のグラフにおいて，直線OPと直線QRの傾きが等しいとき，aの値を求めよ。

2　**図 1** のように，AB＝2cm，AD＝6cmの長方形ABCDと，ABに平行な線分EFがあり，EF＝2cm，ABとEFの距離は1cmである。2点P，QはAを同時に出発し，点Pは毎秒1cmの速さで長方形の辺上を矢印の向きに1周し，点Qは毎秒2cmの速さで長方形の辺上を矢印の向きに2周する。このとき，3点E，F，Pを結んでできる三角形の面積をSとし，3点E，F，Qを結んでできる三角形の面積をTとする。**図 2** は，点Pが動き始めてからの時間と面積Sの関係を表すグラフである。このとき，次の問いに答えなさい。

図 1

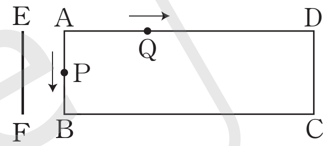
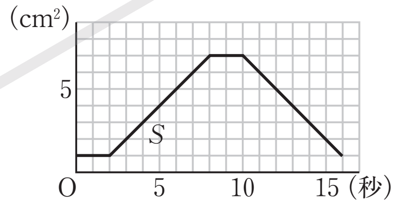


図 2



回(1)　点Qが動き始めてからの時間と面積Tの関係を表すグラフを，**図 2** にかき加えよ。

回(2)　2点P，Qが動き始めてから，最初にSとTが等しくなるのは何秒後か。また，そのときの面積を求めよ。

□(3)　SとTの和が最大となるのは2点P，Qが動き始めてから何秒後か。

3　兄と弟は，いつも午前7時12分に同時に家を出て，一定の速さで一緒に歩いて学校へ行くことにしている。ある日，弟はいつもより早く，午前7時に1人で家を出て，いつもと同じ速さで歩いて学校へ向かった。ところが，出発して15分後に忘れ物に気づき，走って家に戻った。戻る途中で，いつもと同じ時刻に家を出て，いつもと同じ速さで学校へ向かっている兄に出会った。その後，家に着いて忘れ物をとり，すぐに同じ速さで走って学校へ向かい，午前7時24分に歩いている兄に追いついた。このとき，次の問いに答えなさい。

回(1)　弟が家に戻った時刻は7時何分か。

回(2)　忘れ物に気づいた地点をA，弟が兄と初めて出会った地点をBとするとき，家から地点Aまでの距離は，家から地点Bまでの距離の何倍か。