第7講　統計的な推測(1)　確率分布と期待値・分散

基本事項

① 確率変数と確率分布

試行の結果によって値が決まり，各値をとる確率が定まっている変数を確率変数という。確率変数のとり得る値とその値をとる確率との対応を確率分布または分布といい，確率変数はその確率分布に従うという。

確率変数Xについて，$X=a$，$a \leqq X \leqq b$ となる確率をそれぞれ$P(X=a)$，$P(a \leqq X \leqq b)$で表す。また，$aX+b=c$ となる確率は$P(aX+b=c)$で表す。

確率変数Xのとり得る値が x_1，x_2，$\cdots$，x_n で，$P(X=x_i)=p_i$ （$i=1$，2，$\cdots$，n）であるとき

$$0 \leqq p_i \leqq 1 \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\quad p_1+p_2+\cdots+p_n=\sum_{i=1}^{n} p_i=1$$

である。

例　3枚の硬貨を投げるとき，表の出る枚数をX枚とするとXは確率変数である。

Xの確率分布を表で表すと，右の表のようになる。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

② 確率変数の期待値・分散・標準偏差

確率変数Xが右の表に示された確率分布に従うとき

X	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots\cdots$	p_n	1

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i$$

を確率変数Xの期待値(平均)といい，$E(X)$で表す。

変量xについてのデータが右の度数分布表によって表されるとき，このデータから無作為に取り出した値をXとすると，x_iの相対度数 $\dfrac{f_i}{N}$ は$X=x_i$ となる確率$P(X=x_i)$に等しいから，x の平均値 $\overline{x}=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{n} x_if_i$ とXの期待値 $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\dfrac{f_i}{N}$ は一致する。

x	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n	計
度数	f_1	f_2	$\cdots\cdots$	f_n	N
相対度数	$\frac{f_1}{N}$	$\frac{f_2}{N}$	$\cdots\cdots$	$\frac{f_n}{N}$	1

↓

X	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots\cdots$	p_n	1

$E(X)=m$ とするとき，$(X-m)^2$ の期待値

$$\begin{aligned}E((X-m)^2)&=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n\\&=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i\end{aligned}$$

を確率変数Xの分散といい，$V(X)$で表す。$V(X)$の正の平方根 $\sqrt{V(X)}$ を確率変数Xの標準偏差といい，σ（シグマ）(X)で表す。これらの値も変量についての分散，標準偏差と対応する。

$$V(X)=E((X-m)^2)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i \qquad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2p_i}$$

$V(X)$について，$V(X)=E(X^2)-m^2$ が成り立つ。x_i-m の値が複雑なときは，この式で計算するとよい。

③ 確率変数の変換

確率変数Xが右の表に示された確率分布に従うとき，

$P(aX+b=ax_i+b)=P(X=x_i)=p_i$ （$a \neq 0$） であるから

X	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots\cdots$	p_n	1

$$E(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b)p_i=a\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i=aE(X)+b$$

$$V(aX+b)=a^2V(X) \qquad \sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$$

4 同時分布

2つの確率変数X，Yのとり得る値がそれぞれx_1，x_2，…，x_mとy_1，y_2，…，y_nで，$P(X=x_i,\ Y=y_j)=p_{ij}$とする。このとき，組$(x_i,\ y_j)$とp_{ij}の対応をX，Yの同時分布という。

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=p_i=P(X=x_i),\quad \sum_{i=1}^{m} p_{ij}=q_j=P(Y=y_j)$$

である。

3つ以上の確率変数についても同時分布を考えることがある。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	……	y_n	計
x_1	p_{11}	p_{12}	……	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	……	p_{2n}	p_2
⋮			……………………		⋮
x_m	p_{m1}	p_{m2}	……	p_{mn}	p_m
計	q_1	q_2	……	q_n	1

5 確率変数の和と期待値

確率変数X，Yについて，$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$が成り立つ。

同様に，3つ以上の確率変数についても，和の期待値は期待値の和に等しい。

例題 1

赤球2個，白球4個が入った袋から同時に3個の球を取り出し，その中に含まれる赤球の個数をX個とする。次の問いに答えよ。

(1) Xの確率分布を表で表せ。

(2) Xの期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(3) 取り出した球について，赤球1個につき5点，白球1個につき2点が得られるとし，このときの得点の合計をY点とする。Yの期待値，分散，標準偏差を求めよ。

解答 (1) Xのとり得る値は，0，1，2である。

$$P(X=0)=\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3}=\frac{1}{5},\ P(X=1)=\frac{{}_2C_1\cdot{}_4C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{5},\ P(X=2)=\frac{{}_2C_2\cdot{}_4C_1}{{}_6C_3}=\frac{1}{5}$$

であるから，Xの確率分布は右の表のようになる。

X	0	1	2	計
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

(2) $E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$

$V(X)=E((X-1)^2)=(-1)^2\times\frac{1}{5}+0\times\frac{3}{5}+1^2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{10}}{5}$

(3) 赤球の個数がX個であるから，白球の個数は$(3-X)$個である。

よって，$Y=5X+2(3-X)=3X+6$

したがって，$E(Y)=E(3X+6)=3E(X)+6=9$，$V(Y)=3^2V(X)=\frac{18}{5}$，$\sigma(Y)=3\sigma(X)=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

正解へのアクセス

(1)ではXのとり得る値を考え，そのすべての値について確率を計算する。(2)では期待値が1で偏差も整数となるから，分散は定義から計算すればよい。

類題 1

赤球3個，白球3個が入った袋から，同時に3個の球を取り出し，その中に含まれる赤球の個数をX個とする。次の問いに答えよ。

(1) Xの確率分布を表で表せ。

(2) Xの期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(3) 取り出した球について，赤球1個につき2点，白球1個につき4点が得られるとし，このときの得点の合計をY点とする。Yの期待値，分散，標準偏差を求めよ。

例題 2

1から5までの整数が書かれたカードが1枚ずつある。この中から1枚のカードを引くとき，そのカードに書かれた数について，次のように確率変数X，Yを定める。

素数であるとき $X=1$，素数でないとき $X=2$

奇数であるとき $Y=1$，偶数であるとき $Y=2$

次の問いに答えよ。

(1) XとYの同時分布を表で表せ。

(2) $X+Y$の確率分布を表で表し，$E(X+Y)$を求めよ。

(3) $E(X)$，$E(Y)$を求め，これらの値を用いて$E(X+Y)$を求めよ。

解答 (1) $X=1$，$Y=1$ となるのは，3または5のカードを引いたときであるから

$$P(X=1,\ Y=1)=\frac{2}{5}$$

同様に考えて，XとYの同時分布は右の表のようになる。

X \ Y	1	2	計
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
計	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

(2) $X+Y$のとり得る値は2，3，4である。(1)の同時分布の表より，$X+Y$の確率分布は右の表のようになる。

$X+Y$	2	3	4	計
P	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

したがって

$$E(X+Y)=2\times\frac{2}{5}+3\times\frac{2}{5}+4\times\frac{1}{5}=\frac{14}{5}$$

(3) $$E(X)=1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$$

$$E(Y)=1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$$

であるから

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=\frac{14}{5}$$

正解へのアクセス

同時分布の各行，各列の和が，それぞれX，Yが各値をとる確率である。

類題 2

1，2が書かれたカードがそれぞれ2枚，3枚ある。これら5枚のカードから続けて2枚引くとき，カードに書かれた数について，次のように確率変数X，Yを定める。

1枚目のカードに書かれている数をXとする。

2枚のカードに書かれている数の和が奇数のとき $Y=1$，偶数のとき $Y=2$

次の問いに答えよ。

(1) XとYの同時分布を表で表せ。

(2) $X+Y$の確率分布を表で表し，$E(X+Y)$を求めよ。

(3) $E(X)$，$E(Y)$を求め，これらの値を用いて$E(X+Y)$を求めよ。

◆ 演　習　問　題 ◆

1　赤球4個，白球5個が入っている袋から球を4個同時に取り出すとき，取り出した赤球と白球の個数の差をX個とする。Xの確率分布を表で表し，$E(X)$，$V(X)$，$\sigma(X)$を求めよ。▶例題 1

2　100円硬貨3枚，500円硬貨2枚を投げる。表の出た硬貨の金額の和の期待値を求めよ。▶例題 2

3　2本の当たりくじを含む6本のくじがある。まずAが2本引き，次にBが残りのくじから1本引くとき，A，Bが引いた当たりくじの本数をそれぞれX本，Y本とする。次の問いに答えよ。▶例題 2

(1)　XとYの同時分布を表で表せ。

(2)　$E(X+Y)$を求めよ。

4　確率変数Xが右の表に表される確率分布に従うとき，次の問いに答えよ。

X	18	23	28	33	38	43	48	計
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	1

(1)　確率変数Yを$Y=\dfrac{X-33}{5}$で定めるとき，$E(Y)$を求めよ。

(2)　$E(X)$，$V(X)$，$\sigma(X)$を求めよ。

5　さいころを2個投げ，出た目の最大値をXとする。次の問いに答えよ。

(1)　$P(X=k)$　($k=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$) を求めよ。

(2)　$E(X)$，$\sigma(X)$を求めよ。

6　赤球3個と白球2個が入った袋がある。さいころを1個投げて，3の倍数の目が出れば球を3個，それ以外の目が出れば球を2個袋から取り出し，取り出した球の中の赤球の個数をX個とする。Xの期待値を求めよ。

7　それぞれに1，2，3，4の番号のついた箱に，1，2，3，4の番号のうち1つを書いたカードが1枚ずつ，合計4枚が入った袋から1枚ずつカードを取り出して入れ，入っているカードと番号が一致する箱の個数をX個とする。$E(X)$，$V(X)$を求めよ。

応　用　問　題

STEP 1

1　100円硬貨1枚と50円硬貨3枚を投げて，表の出た硬貨の合計金額と裏の出た硬貨の合計金額のうち多い方をX円とする。Xの期待値を求めよ。

2　1，2，3，4が書かれたカードがそれぞれ1枚，2枚，3枚，4枚の合計10枚入った袋がある。この袋から続けて3枚のカードを取り出し，書かれた数の和をXとする。$E(X)$を求めよ。

3　確率変数Xのとる値は1，2，…，nであり，$P(X=k)=ak$（$k=1$，2，…，n，aは定数）である。次の問いに答えよ。

(1)　aの値を求めよ。

(2)　$E(X)$，$E\left(X+\dfrac{1}{X}\right)$を求めよ。

(3)　$V(X)$を求めよ。

4　数が1つずつ書かれたカードが何枚か袋に入っている。この袋から1枚取り出すとき，カードに書かれた数をXとし，Xの値に応じた賞金を得るくじ引きを考える。参加料を100円とし，賞金が$8X$円であるとき利益の期待値は20円，賞金がX^2円であるとき利益の期待値は150円であるという。ただし，賞金が参加料を下回るときは利益は負の値をとるものとして考える。Xの標準偏差を求めよ。

5　さいころを1個投げる試行を何回か繰り返して，出た目の和が3以上になったら試行を終わるものとする。試行が終わるまでにさいころを投げる回数の期待値，標準偏差を求めよ。

6　1からnまでの整数が書かれた球が1個ずつ，合計n個入っている袋から，球を1個取り出してもとに戻す試行を3回行う。取り出した球に書かれた数の最大値と最小値の差をXとする。Xの期待値を求めよ。