高校新演習　大学受験 数学Ⅰ・A

目次

STANDARD

第2講 ››› 方程式と不等式

必須事項

1 等式の性質

(1) $a=b \Longrightarrow a+c=b+c$

(2) $a=b \Longrightarrow a-c=b-c$

(3) $a=b \Longrightarrow ac=bc$

(4) $a=b$，$c \neq 0 \Longrightarrow \dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c}$

2 不等式の性質

(1) $a>b \Longrightarrow a+c>b+c$

(2) $a>b \Longrightarrow a-c>b-c$

(3) $a>b$，$c>0 \Longrightarrow ac>bc$

(4) $a>b$，$c>0 \Longrightarrow \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

(5) $a>b$，$c<0 \Longrightarrow ac<bc$

(6) $a>b$，$c<0 \Longrightarrow \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

3 連立不等式

いくつかの不等式を同時に満たす x の値の範囲を求めるとき，その不等式の組を連立不等式という。

例　連立不等式 $\begin{cases} 3x-4 \leqq x+10 & \cdots\cdots① \\ 3(6-x)<8+2x & \cdots\cdots② \end{cases}$ を解くとき

①を解くと，$3x-4 \leqq x+10$　$3x-x \leqq 10+4$　$2x \leqq 14$　$x \leqq 7$　……③

②を解くと，$18-3x<8+2x$　$18-8<2x+3x$　$10<5x$　$2<x$　……④

連立不等式の解は，③，④の共通部分で，$2<x \leqq 7$

4 絶対値記号を含む不等式

不等式の中に絶対値がある場合は，絶対値の定義にしたがって場合分けをして解く。

例　$|2x-3|<5$ を解くと

(i)　$2x-3 \geqq 0$，すなわち $x \geqq \dfrac{3}{2}$ のとき，$|2x-3|=2x-3$ であるから

$2x-3<5$　$2x<5+3$　$2x<8$　$x<4$　ゆえに，$\dfrac{3}{2} \leqq x<4$

(ii)　$2x-3<0$，すなわち $x<\dfrac{3}{2}$ のとき，$|2x-3|=-(2x-3)$ であるから

$-(2x-3)<5$　$-2x+3<5$　$-2<2x$　$-1<x$　ゆえに，$-1<x<\dfrac{3}{2}$

(i)，(ii)より，求める解は，$-1<x<4$

5 2次方程式の解法

(1)　因数分解による

$PQ=0 \Longrightarrow P=0$ または $Q=0$

の性質を用いる。

例　$x^2-6x+5=0$ を解くとき

左辺を因数分解すると，$(x-1)(x-5)=0$

したがって，$x-1=0$ または $x-5=0$

ゆえに，$x=1,\ 5$

(2)　$x^2=k$ の形の 2 次方程式

$x^2=k\,(k>0)$ の 2 次方程式は，$x=\pm\sqrt{k}$ として解く。

例　$2x^2-6=0$を解くとき

$2x^2=6$　　$x^2=3$

したがって，$x=\pm\sqrt{3}$

(3)　解の公式の利用

(i)　$ax^2+bx+c=0$ の解は，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (ただし，$b^2-4ac\geqq 0$)

(ii)　$ax^2+2b'x+c=0$ の解は，$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ (ただし，$b'^2-ac\geqq 0$)

6 2次方程式の解の個数

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において，判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，実数解の個数は

$D>0 \Longleftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解

$D=0 \Longleftrightarrow$ 1 つの実数解 $x=-\dfrac{b}{2a}$ (重解)

$D<0 \Longleftrightarrow$ 実数解はない

(注)　$ax^2+2b'x+c=0$ においては，$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ として，D と同様に考える。

例　2 次方程式 $2x^2+3x+1=0$ の判別式を D とすると，$D=3^2-4\cdot 2\cdot 1=1>0$ より，異なる 2 つの実数解をもつ。

2 次方程式 $x^2+2x+1=0$ の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=1^2-1\cdot 1=0$ より，1 つの実数解 $x=-1$ (重解)をもつ。

2 次方程式 $x^2+x+2=0$ の判別式を D とすると，$D=1^2-4\cdot 1\cdot 2=-7<0$ より，実数解はない。

例題1

次の不等式を解け。

(1) $0.35x+20<0.47x-100$

(2) $\dfrac{2}{3}x-\dfrac{x+1}{2}<\dfrac{x-7}{4}+\dfrac{5}{6}$

解答

(1) $0.35x+20<0.47x-100$

両辺を100倍すると

$35x+2000<47x-10000$　　$-12x<-12000$

両辺を-12で割って，$x>1000$

(2) $\dfrac{2}{3}x-\dfrac{x+1}{2}<\dfrac{x-7}{4}+\dfrac{5}{6}$

両辺を12倍すると

$8x-6(x+1)<3(x-7)+10$　　$-x<-5$

両辺を -1で割って，$x>5$

例題2

2 つの不等式 $5+2x\leqq16$，$x-1<4x+2$ を満たす整数のうち，最大のものと最小のものを求めよ。

解答

$5+2x\leqq16$ を解くと，$2x\leqq11$ より

$x\leqq\dfrac{11}{2}$　……①

$x-1<4x+2$ を解くと，$-3x<3$ より

$x>-1$　……②

連立不等式の解は，①，②の共通部分であるから

$-1<x\leqq\dfrac{11}{2}$

これを満たす整数のうち，最大のものは 5，最小のものは 0

例題3

鉛筆 4 ダースを配るのに，A組では 1 人に 3 本ずつ配ると余るが，4 本ずつは配れない。B組では 1 人に 4 本ずつ配ると余るが，5 本ずつは配れない。

両組の人数の差が 5 人のときのA組の人数は何人か。

解答

A組の人数を x 人とすると，B組の人数は$(x-5)$人である。

A組での条件を考えて，$3x<48<4x$ より，$12<x<16$　……①

B組での条件を考えて，$4(x-5)<48<5(x-5)$より，$\dfrac{73}{5}<x<17$　……②

したがって，①，②を満たす正の整数は，$x=15$より，A組の人数は15人である。

ヒント

正の数をかけても，不等号の向きは変わらない。

負の数で割ると，不等号の向きが変わる。

2 つの不等式の共通部分が解となる。

$14<\dfrac{73}{5}<15$ より，①，②を満たす正の整数は15。

例題4

k を定数とする 2 次方程式 $x^2-(k-3)x+k=0$ が重解をもつとき，k の値と，そのときの重解 x の値を求めよ。

解答

$x^2-(k-3)x+k=0$ ……㊟ とおく。

2 次方程式㊟の判別式をDとおくと，㊟が重解をもつとき

$\{-(k-3)\}^2-4\cdot1\cdot k=0$

$k^2-10k+9=0$

$(k-1)(k-9)=0$ より，$k=1$，9

k の値を㊟に代入して，$k=1$ のとき，$x^2+2x+1=0$ より，$x=-1$

$k=9$ のとき，$x^2-6x+9=0$ より，$x=3$

例題5

次の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $x^2+(a+1)x+3=0$ の 1 つの解が $x=-3$ のとき，定数 a の値と他の解を求めよ。

(2) 2 次方程式 $ax^2+5x-2=0$ の 1 つの解が $x=\frac{1}{3}$ のとき，定数 a の値と他の解を求めよ。

解答

(1) $x=-3$ を与えられた方程式に代入すると，$9-3(a+1)+3=0$

整理すると，$a=3$

このとき，方程式は，$x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0$ より，他の解は $x=-1$

(2) $x=\frac{1}{3}$ を与えられた方程式に代入すると，$\frac{1}{9}a+\frac{5}{3}-2=0$

整理すると，$a=3$

このとき，方程式は，$3x^2+5x-2=0$

$(3x-1)(x+2)=0$ より，他の解は $x=-2$

例題6

x の 2 次方程式 $x^2-ax+a+1=0$ の 2 つの解の比が 3：2 のときの定数 a の値を求めよ。

解答

2 つの解を $3k$，$2k$ とすると，$x^2-ax+a+1=(x-3k)(x-2k)$ と表される。

$x^2-ax+a+1=x^2-5kx+6k^2$ より，両辺の係数を比較すると

$-a=-5k$，$a+1=6k^2$

2 つの式より，k を消去すると，2 次方程式 $6a^2-25a-25=0$ が得られる。

これを解いて，$a=-\frac{5}{6}$，5

ヒント

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が重解をもつ条件は

$D=b^2-4ac=0$

である。

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が $x=p$ を解にもつとき

$ap^2+bp+c=0$

である。

$k=\frac{a}{5}$ を$a+1=6k^2$ に代入して

$a+1=\frac{6}{25}a^2$

$6a^2-25a-25=0$

$(6a+5)(a-5)=0$

基本問題演習

1 2つの不等式 $\dfrac{3x-5}{2} \leqq \dfrac{2x+5}{3}$，$\dfrac{x+1}{3} \leqq \dfrac{1}{2}x+1$ が同時に成り立つ x の値の範囲は，$\boxed{\text{アイ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ウ}}$ である。

2 a，b は正の実数で，$\dfrac{a}{b}$ は整数でないとする。$\dfrac{a}{b}$ をこえない最大の整数を m，$\dfrac{b}{a-bm}$ をこえない最大の整数を n とする。すなわち m，n は

$$m<\frac{a}{b}<m+1,\ n \leqq \frac{b}{a-bm}<n+1$$

を満たす整数である。

(1) $a=17$，$b=3$ のとき，$m=\boxed{\text{ア}}$，$n=\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $a=20$，$b=\sqrt{2}$ のとき，$m=\boxed{\text{ウエ}}$，$n=\boxed{\text{オ}}$ である。

(3) $\dfrac{9}{4}<\dfrac{a}{b} \leqq \dfrac{7}{3}$ であるとき，$m=\boxed{\text{カ}}$ であるから，$\dfrac{a}{b}-m$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}<\frac{a}{b}-m \leqq \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

となる。よって，$\dfrac{b}{a-bm}$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{サ}} \leqq \frac{b}{a-bm}<\boxed{\text{シ}}$$

となり，$n=\boxed{\text{ス}}$ と定まる。

(4) $m=n=2$ となるときの $\dfrac{a}{b}$ のとり得る値の範囲は，$\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}<\dfrac{a}{b} \leqq \dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}$ である。

3 方程式

$$|(\sqrt{14}-2)x+2|=4$$

の解は

$$x=-\frac{\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}\sqrt{14}}{\boxed{\text{ウ}}},\ \frac{\boxed{\text{エ}}+\sqrt{14}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である。また

$$-\frac{\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}\sqrt{14}}{\boxed{\text{ウ}}}<n<\frac{\boxed{\text{エ}}+\sqrt{14}}{\boxed{\text{オ}}}$$

を満たす整数 n の個数は，$\boxed{\text{カ}}$ 個である。

4 (1) 等式 $|2x-3|=5$ を満たす x の値は，$\boxed{\text{アイ}}$ と $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) 不等式 $\left|x-\dfrac{3}{2}\right|<\sqrt{6}$ を満たす整数 x の個数は，$\boxed{\text{エ}}$ 個である。

(3) n が自然数で，不等式 $\left|x-\dfrac{3}{2}\right|<n$ を満たす整数 x の個数が 6 であるとき，$n=\boxed{\text{オ}}$ である。

5 $a=5+2\sqrt{6}$，$b=3+2\sqrt{2}$ とすると

$\dfrac{1}{a}=\boxed{ア}-\boxed{イ}\sqrt{\boxed{ウ}}$，$\dfrac{1}{b}=\boxed{エ}-\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$

$\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}=\boxed{キク}\sqrt{\boxed{ケ}}-\boxed{コサ}\sqrt{\boxed{シ}}$

である。このとき，不等式 $|2abx-a^2|<b^2$ を満たす x の値の範囲は

$\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}-\boxed{ソタ}\sqrt{\boxed{チ}}<x<\boxed{ツテ}-\boxed{ト}\sqrt{\boxed{ナ}}$

となる。

6 x の 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ (a，b は整数)の 1 つの解が $1+\sqrt{3}$ のとき

$a=\boxed{アイ}$，$b=\boxed{ウエ}$

である。

7 2 次方程式 $2x^2-2ax-a+1=0$ (a は定数)の 1 つの解が $2a-1$ であるとする。

(1) $a=\boxed{ア}$，$\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ である。

(2) $a=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ のとき，2 つの解は，小さいほうから順に

$\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$，$\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$

である。

8 2 次方程式 $x^2-(4k-1)x+3k^2+k-2=0$ の解を定数 k を用いて表すと

$x=k+\boxed{ア}$ または $\boxed{イ}k-\boxed{ウ}$

である。また，この方程式が重解をもつときの k の値は，$k=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である。

9 a，b は定数とする。2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ は重解をもち，2 次方程式 $x^2+bx+a=0$ の異なる 2 つの実数解の 1 つは -2 であるという。

はじめの 2 次方程式の重解は，$x=\boxed{ア}$ である。

10 a，b が 5 以下の自然数のとき，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ場合は，$\boxed{アイ}$ 通りある。

また，$b=5$ のときの解は，$x=\dfrac{\boxed{ウエ}\pm\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$ である。

11 2 次方程式 $x^2-5(m-1)x-16m=0$（mは定数）の 2 つの解の比が 1：4 であるとき，$m=\boxed{\text{アイ}}$ で，2 つの解は $\boxed{\text{ウエ}}$ と $\boxed{\text{オカ}}$ である。ただし，$\boxed{\text{ウエ}}>\boxed{\text{オカ}}$ である。

12 a，b を自然数とする。

2 次方程式 $x^2-4ax+4a^2-4a-3b+9=0$ が 2 つの解をもつとする。その 2 つの解の差が $2\sqrt{11}$ であるとき，$4a+3b=\boxed{\text{アイ}}$ である。したがって，a，b の値は，$a=\boxed{\text{ウ}}$，$b=\boxed{\text{エ}}$ である。

13 2 つの 2 次方程式

$$\begin{cases} x^2+(a-2)x-5a=0 \\ x^2-(a+4)x+5a=0 \end{cases}$$

が共通解をもつように，正の数 a の値を定めると，$a=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

14 mが正の整数のとき，x の 2 次方程式

$$x^2-(3+\sqrt{2})x+m\sqrt{2}-4=0$$

の 1 つの解 α が整数になったという。このとき，$m=\boxed{\text{ア}}$，$\alpha=\boxed{\text{イ}}$ であり，残りの解を β とすると，$\beta=\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}-\boxed{\text{エ}}$ である。ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることはわかっているものとする。

15 a，b を定数とする x の 2 次方程式

$$x^2+ax+a+b+2=0 \quad \cdots\cdots ⊛$$

がある。

(1) 方程式⊛の 2 つの解が 2，4 であるとき，$a=\boxed{\text{アイ}}$，$b=\boxed{\text{ウエ}}$ である。

(2) 方程式⊛が重解をもつとき，b を a の式で表すと

$$b=\frac{a^2-\boxed{\text{オ}}\,a-\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

となる。したがって，b の値が最小となるときの重解は，$\boxed{\text{クケ}}$ である。

16 k を定数とする x の 2 次方程式 $x^2-2kx+k+2=0$ ……① の 2 つの解を α, β とする。

(1)(i) $\alpha=-2$ のとき，$k=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$, $\beta=\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(ii) $\alpha=\beta$ のとき，$k=\boxed{\text{キク}}$ または $k=\boxed{\text{ケ}}$ である。

(2) α が x の 2 次方程式 $x^2+kx-3k+5=0$ ……② の解でもあるとき，①，②に $x=\alpha$ を代入した式から，k を消去して整理すると

$$\boxed{\text{コ}}\alpha^3-4\alpha^2+\boxed{\text{サシ}}\alpha-\boxed{\text{スセ}}=0$$

である。

17 (1)(i) 不等式 $|2x+1|\leqq 3$ の解は $\boxed{\text{アイ}}\leqq x\leqq\boxed{\text{ウ}}$ である。

以下，a を自然数とする。

(ii) 不等式

$$|2x+1|\leqq a \quad \cdots\cdots\cdots⊛$$

の解は，$\dfrac{-\boxed{\text{エ}}-a}{\boxed{\text{オ}}}\leqq x\leqq\dfrac{-\boxed{\text{エ}}+a}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(iii) 不等式⊛を満たす整数 x の個数を N とする。$a=3$ のとき，$N=\boxed{\text{カ}}$ である。a が 4，5，6，……と増加するとき，N が初めて $\boxed{\text{カ}}$ より大きくなるのは，$a=\boxed{\text{キ}}$ のときである。

(2) a，b を実数として，2 次方程式 $(x-a)^2+4(x-a)+b=0$ を考える。

下の $\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ス}}$ には次の⓪～⑤のうちからあてはまるものを 1 つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

⓪ $>$　① $<$　② $\geqq$　③ $\leqq$　④ $=$　⑤ $\neq$

この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつ条件は

$$b\ \boxed{\text{ク}}\ \boxed{\text{ケ}}$$

が成立することである。その 2 つの解を s，t とすると

$$b=\frac{\boxed{\text{コサ}}-(s-t)^2}{\boxed{\text{シ}}}$$

である。さらに s，t がともに正となる条件は

$$a\ \boxed{\text{ス}}\ \boxed{\text{セ}}+\sqrt{\boxed{\text{ソ}}-b}$$

が成立することである。

18 a，b を定数とし，次の不等式を考える。

$$2x+a<3x\leqq x+b$$

この不等式は，$\boxed{\text{(あ)}}$ のとき解をもち，
$\boxed{\text{(い)}}$ のときは解をもたない。

$\boxed{\text{(あ)}}$，$\boxed{\text{(い)}}$ にあてはまる，最も適切な a，b の条件を不等式で記述せよ。

応用問題演習

STEP 1

1 次の問いに答えよ。

(1) x の不等式 $2ax-1 \leqq 4x$ の解が $x \geqq -5$ であるのは，定数 a がどのような値のときか。〈関西大〉

(2) $3-2|x|>|x-1|$ を解け。〈大阪産業大〉

(3) x の方程式 $2|x-5|-|x-a|+3=0$ がただ1つの解をもつとき，定数 a の値を求めよ。〈神戸学院大〉

2 不等式 $ax+3>2x$ を解け。ただし，a は定数とする。〈広島工業大〉

3 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする。不等式 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}<\dfrac{6}{a}+\dfrac{k}{b}$ を満たす k の値の範囲を求めよ。〈広島大〉

4 2つの不等式 $|x-6|<3$ ……①，$|x-k|<5$ ……② がある。ただし，定数 k は実数とする。このとき，次の問いに答えよ。〈國學院大〉

(1)(ア) ①の不等式を解け。

　(イ) ②の不等式を解け。

(2) ①，②をともに満たす実数 x が存在するような k の値の範囲を求めよ。

(3) ①，②をともに満たす x が整数のとき，解の数が3つとなるような k の値の範囲を求めよ。

5 連立不等式 $ax<\dfrac{4x-b}{-2}<2x$ の解が $1<x<4$ であるとき，a，b の値を求めよ。〈駒澤大〉

6 不等式 $p(x+2)+q(x-1)>0$ を満たす x の範囲が $x<\dfrac{1}{2}$ であるとき，不等式 $q(x+2)+p(x-1)<0$ を満たす x の範囲を求めよ。ただし，p と q は実数の定数とする。〈法政大〉

7 次の 2 つの式を同時に満たす x, y の値の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。〈関西大〉

$$\begin{cases} x^2-y^2+x+y=0 & \cdots\cdots① \\ x^2-3x+2y^2+3y=9 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

8 方程式 $(x+3)|x-4|+2x+6=0$ を解け。〈立教大〉

9 x についての 2 つの 2 次方程式 $2x^2-(3m-1)x+m^2-m=0$ と $x^2-(2m-5)x+m^2-5m+6=0$ がただ 1 つの共通解をもつような m の値を求めよ。また，そのときの共通解を求めよ。〈国士舘大〉

10 x についての異なる 2 つの 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ ……①，$x^2+bx+a=0$ ……②　がただ 1 つの共通解をもつとするとき，次の問いに答えよ。〈國學院大〉

(1) その共通解を求めよ。

(2) a, b が満たすべき条件を求めよ。

(3) ①，②のもう 1 つの解はそれぞれ b, a に等しいことを示せ。

STEP 2

1 3 つの数 x, y, z が $x<y<z$, $y>0$ および $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$, $x+1=y$, $y+1=z$ を満足するとき，$x=\boxed{\text{(ア)}}$ であり，また $xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)+3xyz+3(x+y+z)=\boxed{\text{(イ)}}$ である。〈国士舘大〉

2 実数 x に対して，$k\leqq x<k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ と表すことにする。このとき，方程式 $2[x]=4x-5$ は 2 つの解 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ をもつ。x_1, x_2 の値を求めよ。〈法政大〉